ИНДЕКС ПУАНКАРЕ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВОЗМУЩЕННЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ[1]

О. Ю. Макаренков (Воронеж)

СОДЕРЖАНИЕ

§1. Введение 1

§2. Основной результат 3

§3. Вычисление индекса 13

§4. Сопоставление с теоремами Малкина и Мельникова 14

§5. Вырожденные резонансы. Сопоставление с теоремой Йагасаки 25

§6. Расположение устойчивых и неустойчивых периодических решений 29

§7. Заключение 31

Литература 31

§1. Введение

Рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{1.0}$$

где f – непрерывно дифференцируемая функция такая, что решение системы (1) с любым начальным условием продолжимо на интервал $(-\infty, \infty)$. Систему (1) будем называть порождающей. Предположим, что система (1) допускает T-периодический цикл $\widetilde{x}$. В силу автономности, при любой сдвижке $\theta \in [0, T]$ функция

$$\widetilde{x}^{\theta}(t) = \widetilde{x}(\theta + t)$$

вновь является T-периодическим решением системы (1). Предположим, что функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ T-периодична по первой переменной и рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{1.0}$$

Статья посвящена классической задаче, восходящей к А. Пуанкаре, о существовании у возмущенной системы (1) T-периодических решений $\widetilde{x}_\varepsilon$, сходящихся при $\varepsilon \to 0$ к порождающему решению $\widetilde{x}^{\theta}$. Пуанкаре принадлежит утверждение о том, что параметр $\theta = \theta_0$ порождающего решения, для которого такое существование имеет место, необходимо является нулем некоторой бифуркационной функции M. Функцию M Пуанкаре записывал в неявном виде.

Позднее И. Г. Малкин [23] и В. К. Мельников [26] указали явный вид функции M и при помощи теоремы о неявной функции в различных ситуациях доказали, что достаточным условием существования у системы (1) T-периодического решения $\widetilde{x}_\varepsilon$, сходящегося при $\varepsilon \to 0$ к $\widetilde{x}^{\theta_0}$, является условие

$$M'(\theta_0) \neq 0, \tag{1.0}$$

[1] Основные результаты статьи доложены на семинаре Отдела дифференциальных уравнений Математического института им. В. А. Стеклова РАН 22 марта 2006 г.

то есть условие простоты корня θ_0.

Различие между ситуациями, изучаемыми Малкиным и Мельниковым, связаны с условиями, предъявляемыми к T-периодической линейной системе

$$\dot{y} = f'(\widetilde{x}(t))y. \tag{1.0}$$

Так Малкин предполагал, что

(C_{MA}): алгебраическая кратность мультипликатора $+1$ системы (1) равна 1,

а Мельников, что

(C_{ME}): алгебраическая кратность мультипликатора $+1$ системы (1) равна 2,
но геометическая кратность мультипликатора $+1$ системы (1) равна 1.

В статье будет показано, что другая идея Пуанкаре, об индексе кривой относительно векторного поля, позволяет получить близкие результаты при одном лишь предположении

(C): в малой окрестности цикла $\widetilde{x}$ нет других $T-$периодических решений
порождающей системы.

Условие (C) выполнено как в ситуации Малкина (C_{MA}), так и в ситуации Мельникова (C_{ME}). Но предположение (C) не использует каких-либо свойств линеаризованной системы (1) и, следовательно, может быть выполнено для вырожденных случаев, когда каждое решение системы (1) является T-периодическим, см. §5.

Предлагаемый подход, в отличии от результатов Малкина и Мельникова, не предполагает дифференцируемости возмущения и связан с дальнейшим развитием теории индекса Пуанкаре, см. [15]. Хотя основная теорема доказывается для случая непрерывного возмущения, следуя стандартным схемам (см., напр., [11], § 6.2), она может быть перенесена не только на случай разрывных возмущений, но и многозначных с выпуклыми образами.

Будет показано, что условия существования периодических решений у возмущенной системы вблизи цикла $\widetilde{x}$ могут быть связаны с числом оборотов, которые делает вектор

$$\Phi\left(\widetilde{x}(\theta)\right) = M_E(\theta)\dot{\widetilde{x}}(\theta)^{\perp} + M_A(\theta)\dot{\widetilde{x}}(\theta), \tag{1.0}$$

когда θ изменяется от 0 до T. Здесь использовано обозначение

$$\xi^{\perp} = \begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix}.$$

Это число оборотов называется индексом Пуанкаре цикла $\widetilde{x}$ по отношению к полю Φ, заданному на цикле $\widetilde{x}$, и обозначается $\mathrm{ind}(\widetilde{x}, \Phi)$. Мы не останавливаемся здесь на определении индекса Пуанкаре, которое имеется, например, в ([36], Гл. III и Гл. XIV), ([20], Гл. IX, §4), ([1], Гл. V, §10.4). Поскольку в указанной литературе индекс Пуанкаре вводится для положительно ориентированной кривой, то в

дальнейшем мы всюду предполагаем, что кривая $\widetilde{x}$ является положительно ориентированной. Функции M_A и M_E формулы (1), которые определяются в следующем параграфе, совпадают при некоторых дополнительных условиях с классическими функциями Малкина и Мельникова.

§2. Основной результат

Для определения функций M_E и M_A рассмотрим решения следующей сопряженной системы

$$\dot{z} = -\left(f'(\widetilde{x}(t))\right)^* z. \tag{2.0}$$

Именно, обозначим через $\widetilde{z}$ решение системы (1) с начальным условием

$$\widetilde{z}(0) = \dot{\widetilde{x}}(0)^{\perp},$$

а через $\widehat{z}$ – решение системы (1) с начальным условием

$$\widehat{z}(0) = \frac{1}{\|\dot{\widetilde{x}}(0)\|^2}\dot{\widetilde{x}}(0).$$

Итак, положим

$$\begin{aligned} M_E^s(\theta) &= \int\limits_{s-T+\theta}^{s+\theta} \langle \widetilde{z}(\tau), g(\tau-\theta, \widetilde{x}(\tau))\rangle\, d\tau, \\ M_A^s(\theta) &= \int\limits_{s-T+\theta}^{s+\theta} \langle \widehat{z}(\tau), g(\tau-\theta, \widetilde{x}(\tau))\rangle\, d\tau, \qquad \theta, s \in [0,T], \end{aligned}$$

где $< \cdot, \cdot >$ – обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$. При этом по определению считаем

$$M_E := M_E^0, \quad M_A := M_A^0.$$

Переходим к формулировке основной теоремы.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть выполнено условие (C) и возмущение в (1) непрерывно. Предположим, что*

$$\text{для любых } s, \theta \in [0,T] \ \text{ равенство } \ M_E^s(\theta) = 0 \ \text{ влечет } \ M_A^s(\theta) \neq 0. \tag{A}$$

Тогда, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ всякое T-периодическое решение $\widetilde{x}_\varepsilon$ возмущенной системы (1) необходимо таково, что

$$\widetilde{x}_\varepsilon(t) \neq \widetilde{x}(s) \quad \text{при всех } t, s \in [0,T]. \tag{2.-3}$$

Если же дополнительно имеем

$$\mathrm{ind}(\widetilde{x}, \Phi) \neq 1, \tag{B}$$

то при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ возмущенная система (1) действительно имеет, по крайней мере, два T-периодических решения $\widetilde{x}_{\varepsilon,1}$ и $\widetilde{x}_{\varepsilon,2}$, удовлетворяющих условию (2.1). Полученным решениям соответствуют $\theta_1, \theta_2 \in [0,T]$ такие, что

$$\widetilde{x}_{\varepsilon,1}(t) \to \widetilde{x}^{\theta_1}(t) \quad \text{при } \varepsilon \to 0$$

и

$$\widetilde{x}_{\varepsilon,2}(t) \to \widetilde{x}^{\theta_2}(t) \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Более того, решение $\widetilde{x}_{\varepsilon,1}$ лежит внутри цикла $\widetilde{x}$, а решение $\widetilde{x}_{\varepsilon,2}$ снаружи.

Готовимся к доказательству теоремы 2.1. Введем для этого необходимые понятия и установим некоторые вспомогательные факты.

Обозначим через $\Omega(\cdot, t_0, \xi)$ решение x порождающей системы (1) с начальным условием $x(t_0) = \xi$. Рассмотрим следующую систему (см. [23], формула 3.8)

$$\dot{y} = f'_{(2)}(t, \Omega(t, 0, \xi))y + g(t, \Omega(t, 0, \xi)) \tag{2.-4}$$

и обозначим через $\eta(\cdot, s, \xi)$ решение y этой системы с начальным условием $y(s) = 0$. Здесь и далее через $F'_{(k)}$ обозначается производная функции F по k-й переменной. Поставим в соответствие системе (1) следующий оператор $\widetilde{\Phi}^s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (см. [14], теорема 1)

$$\widetilde{\Phi}^s(\xi) = \eta(T, s, \xi) - \eta(0, s, \xi).$$

Отметим, что оператор $\widetilde{\Phi}^0$ не совпадает с Φ, однако мы покажем позже, что индексы Пуанкаре указанных операторов, посчитанные на цикле $\widetilde{x}$, совпадают. В случае, когда $f = 0$, то есть порождающей системой является система $\dot{x} = 0$, имеем

$$\widetilde{\Phi}^s(\xi) = \int\limits_0^T g(\tau, \xi)d\tau, \qquad s \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^2.$$

Следовательно, если $f = 0$, то $\widetilde{\Phi}^s$ является, с точностью до множителя $1/T$, классическим оператором усреднения Крылова-Боголюбова-Митропольского возмущенной системы (1) (см. [27], формула 7.112).

Обозначим через $\widehat{y}$ решение линеаризованной системы (1) с начальным условием

$$\widehat{y}(0) = \frac{1}{\|\dot{\widetilde{x}}(0)\|^2}\dot{\widetilde{x}}(0)^{\perp}$$

Имеет место следующее свойство.

Л е м м а 2.1. *Справедлива формула*

$$\widetilde{\Phi}^s(\widetilde{x}(\theta)) = M^s_A(\theta)\dot{\widetilde{x}}(\theta) + M^s_E(\theta)\widehat{y}(\theta), \qquad s, \theta \in \mathbb{R}. \tag{2.-4}$$

Для доказательства леммы, а также для дальнейших рассуждений используется утверждение, которое мы сейчас формулируем.

Л е м м а 2.2. *(см. [12], лемма 1 или [13], лемма 2) Имеет место формула*

$$\eta(\theta, s, \xi) = \Omega'_{(3)}(\theta, 0, \xi) \int\limits_s^\theta \Omega'_{(3)}(0, t, \Omega(t, 0, \xi))g(t, \Omega(t, 0, \xi))d\tau,$$

соответственно

$$\widetilde{\Phi}^s(\xi) = \int\limits_{s-T}^s \Omega'_{(3)}(0, \tau, \Omega(\tau, 0, \xi))g(\tau, \Omega(\tau, 0, \xi))d\tau.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 2.1. В силу леммы 2.2 имеем

$$\widetilde{\Phi}^s(\xi) = \int\limits_{s-T}^s (\Omega)'_{(3)}(0, \tau, \Omega(\tau, 0, \xi))g(\tau, \Omega(\tau, 0, \xi))d\tau.$$

Далее (см., напр., [16], теорема 2.1), $\Omega'_{(3)}(t,0,x_0(\theta)) = Y(t,\theta)$, где $Y(t,\theta)$ – фундаментальная матрица системы

$$\dot{y}(t) = f'(\widetilde{x}(t+\theta))y(t), \tag{2.-4}$$

удовлетворяющая условию $Y(0,\theta) = I$ и так как $\Omega'_{(3)}(0,t,\Omega(t,0,\xi))\Omega'_{(3)}(t,0,\xi) = I$ для любых $t \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^2$, имеем

$$\widetilde{\Phi}^s(\widetilde{x}(\theta)) = \int\limits_{s-T}^{s} Y^{-1}(\tau,\theta)g(\tau,\widetilde{x}(\tau+\theta))d\tau, \qquad s,\theta \in [0,T]. \tag{2.-4}$$

Покажем теперь, что

$$Y^{-1}(\tau,\theta) = Y(\theta,0)Y^{-1}(\tau+\theta,0), \qquad \tau,\theta \in [0,T]. \tag{2.-4}$$

Действительно, легко видеть, что $Y(t+\theta,0)$ – фундаментальная матрица системы (1) и, таким образом, $Y(t+\theta,0)Y^{-1}(\theta,0)$ также является фундаментальной матрицей для (1), более того имеем $Y(t+\theta,0)Y^{-1}(\theta,0) = I$ в $t=0$. Следовательно, $Y(t+\theta,0)Y^{-1}(\theta,0) = Y(t,\theta)$, что эквивалентно (1). Подставляя (1) в (1) и используя замену переменных $\tau+\theta = t$ в интеграле выражения (1), получаем

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}^s(\widetilde{x}(\theta)) &= \int\limits_{s-T}^{s} Y^{-1}(\tau,\theta)g(\tau,\widetilde{x}(\tau+\theta))d\tau = Y(\theta,0)\int\limits_{s-T}^{s} Y^{-1}(\tau+\theta,0)g(\tau,\widetilde{x}(\tau+\theta))d\tau = \\
&= Y(\theta,0)\int\limits_{s-T+\theta}^{s+\theta} Y^{-1}(t,0)g(t-\theta,\widetilde{x}(t))dt.
\end{aligned}$$

Положим $\widetilde{Z}(t) = (\widehat{z}(t),\widetilde{z}(t))$ и обозначим через $Z(t)$ фундаментальную матрицу сопряженной системы (1) такую, что $Z(0) = I$, имеем $Z(t) = \widetilde{Z}(t)\widetilde{Z}^{-1}(0)$. Здесь и далее использована запись (a,b), где $a,b \in \mathbb{R}^2$, для обозначения матрицы, первым столбцом которой является a и вторым b. По лемме Перрона (см. [34] или [9, Sec. III, §12]) $Y^{-1}(t) = Z^*(t)$ и значит

$$\begin{aligned}
\Phi^s(\widetilde{x}(\theta)) &= Y(\theta)\int\limits_{s-T+\theta}^{s+\theta} Y^{-1}(\tau)g(\tau-\theta,\widetilde{x}(\tau))d\tau = \\
&= (\widetilde{Z}^*(\theta))^{-1}\int\limits_{s-T+\theta}^{s+\theta} \widetilde{Z}^*(\tau)g(\tau-\theta,\widetilde{x}(\tau))d\tau = \\
&= (\widetilde{Z}^*(\theta))^{-1}\begin{pmatrix} M_A^s(\theta) \\ M_E^s(\theta) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Но, замечая, что

$$(\widetilde{Z}^*(0))^{-1} = \left(\begin{pmatrix} \left(1/\|\dot{\widetilde{x}}(0)\|^2\right)\dot{\widetilde{x}}_1(0) & -\dot{\widetilde{x}}_2(0) \\ \left(1/\|\dot{\widetilde{x}}(0)\|^2\right)\dot{\widetilde{x}}_2(0) & \dot{\widetilde{x}}_1(0) \end{pmatrix}^{-1}\right)^* =$$

$$= \frac{1}{\det\left\|\begin{pmatrix} \left(1/\|\dot{\widetilde{x}}(0)\|^2\right)\dot{\widetilde{x}}_1(0) & -\dot{\widetilde{x}}_2(0) \\ \left(1/\|\dot{\widetilde{x}}(0)\|^2\right)\dot{\widetilde{x}}_2(0) & \dot{\widetilde{x}}_1(0) \end{pmatrix}\right\|}\circ$$

$$\circ\begin{pmatrix} \dot{\widetilde{x}}_1(0) & \dot{\widetilde{x}}_2(0) \\ -\left(1/\|\dot{\widetilde{x}}(0)\|^2\right)\dot{\widetilde{x}}_2(0) & \left(1/\|\dot{\widetilde{x}}(0)\|^2\right)\dot{\widetilde{x}}_1(0) \end{pmatrix}^* =$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{\widetilde{x}}_1(0) & -\left(1/\|\dot{\widetilde{x}}(0)\|^2\right)\dot{\widetilde{x}}_2(0) \\ \dot{\widetilde{x}}_2(0) & \left(1/\|\dot{\widetilde{x}}(0)\|^2\right)\dot{\widetilde{x}}_1(0) \end{pmatrix} = \left(\dot{\widetilde{x}}(0), \widehat{y}(0)\right),$$

заключаем

$$(\widetilde{Z}^*(\theta))^{-1} = \left(\dot{\widetilde{x}}(\theta), \widehat{y}(\theta)\right) \quad \text{для любого } \theta \in \mathbb{R}.$$

Лемма доказана.

В качестве следующего шага на пути к доказательству теоремы 2.1 мы устанавливаем, что $\mathrm{ind}(\widetilde{x}, \widetilde{\Phi}) = \mathrm{ind}(\widetilde{x}, \Phi)$. Как и в случае функций M_E^s и M_A^s считаем по определению

$$\widetilde{\Phi} := \widetilde{\Phi}^0.$$

Л е м м а 2.3. *Пусть выполнено условие (A) теоремы 2.1. Тогда*

$$\mathrm{ind}(\widetilde{x}, \Phi) = \mathrm{ind}(\widetilde{x}, \widetilde{\Phi}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим деформацию

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(\widetilde{x}(\theta)) &= \left(\int\limits_{-T+\lambda\theta}^{\lambda\theta} \langle \widehat{z}(\tau), g(\tau-\theta, \widetilde{x}(\tau))\rangle\, d\tau\right)\dot{\widetilde{x}}(\theta) + \\ &+ \left(\int\limits_{-T+\lambda\theta}^{\lambda\theta} \langle \widetilde{z}(\tau), g(\tau-\theta, \widetilde{x}(\tau))\rangle\, d\tau\right)\left(\lambda\widehat{y}(\theta) + (1-\lambda)\dot{\widetilde{x}}(\theta)^\perp\right), \quad \theta \in [0,T], \end{aligned}$$

Так как $\Phi_1(\widetilde{x}(\theta)) = \widetilde{\Phi}(\widetilde{x}(\theta))$ и $\Phi_0(\widetilde{x}(\theta)) = \Phi(\widetilde{x}(\theta))$, то достаточно установить, что

$$\Phi_\lambda(\widetilde{x}(\theta)) \neq 0 \quad \text{для всех } \lambda \in [0,1],\ \theta \in [0,T]. \tag{2.-11}$$

По определению $\widehat{y}$ имеем $\left\langle \widehat{y}(0), \dot{\widetilde{x}}(0)^\perp \right\rangle > 0$. Но в силу линейной независимости векторов $\dot{\widetilde{x}}(\theta)$ и $\widehat{y}(\theta)$ для любого $\theta \in [0,T]$ также имеем $\left\langle \widehat{y}(\theta), \dot{\widetilde{x}}(\theta)^\perp \right\rangle \neq 0$. Поэтому

$$\left\langle \widehat{y}(\theta), \dot{\widetilde{x}}(\theta)^\perp \right\rangle > 0 \quad \text{для любого } \theta \in [0,T]$$

и, значит,

$$\left\langle \lambda\widehat{y}(\theta) + (1-\lambda)\dot{\widetilde{x}}(\theta)^\perp, \dot{\widetilde{x}}(\theta)^\perp \right\rangle > 0 \quad \text{для любого } \theta \in [0,T],\ \lambda \in [0,T]. \tag{2.-11}$$

Предположим, что (1) не верно, то есть существуют $\lambda_0 \in [0,1]$, $\theta_0 \in [0,T]$ такие, что

$$\Phi_{\lambda_0}(\widetilde{x}(\theta_0)) = 0.$$

Учитывая (1), из последнего равенства заключаем, что

$$\int\limits_{-T+\lambda_0\theta_0}^{\lambda_0\theta_0} \langle \widehat{z}(\tau), g(\tau-\theta_0, \widetilde{x}(\tau))\rangle\, d\tau = 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_{-T+\lambda_0\theta_0}^{\lambda_0\theta_0} \langle \widetilde{z}(\tau), g(\tau-\theta_0, \widetilde{x}(\tau))\rangle\, d\tau = 0.$$

Но $\lambda_0\theta_0 \in [0,T]$ и, следовательно, последнее соотношение противоречит предположению (A).

Лемма доказана.

Наконец, нам необходимо следующее утверждение.

Л е м м а 2.4. *Функция $x \in C([0,T],\mathbb{R}^2)$ является T-периодическим решением системы (1) тогда и только тогда, когда функция*

$$\nu(t) = \Omega(0,t,x(t)), \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.-11}$$

является решением системы

$$\dot{\nu} = \varepsilon \Omega'_{(3)}(0,t,\Omega(t,0,\nu))g(t,\Omega(t,0,\nu)), \quad t \in \mathbb{R},$$

удовлетворяющим условию $\nu(0) = \Omega(T,0,\nu(T))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Произведем в системе (1) замену переменных

$$x(t) = \Omega(t,0,\nu(t)). \tag{2.-11}$$

Формула (1) каждому $\nu \in C([0,T],\mathbb{R}^2)$ ставит в соответствие $x \in C([0,T],\mathbb{R}^2)$ гомеоморфно, и обратное отображение дается формулой (2.4). Следовательно, функция x является решением системы (1) тогда и только тогда, когда функция ν, введенная по закону (2.4), удовлетворяет следующему равенству

$$\Omega'_{(1)}(t,0,\nu(t)) + \Omega'_{(3)}(t,0,\nu(t))\dot{\nu}(t) = \varepsilon g(t,\Omega(t,0,\nu(t))) + \\ + f(\Omega(t,0,\nu(t))), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2.-11}$$

По определению функции Ω имеем

$$\Omega'_{(1)}(t,0,\nu(t)) = f(\Omega(t,0,\nu(t))),$$

поэтому, учитывая, что

$$\Omega'_{(3)}(0,t,\Omega(t,0,\xi))\Omega'_{(3)}(t,0,\xi) = I, \qquad t \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^2,$$

система (2.-10) может быть переписана в виде

$$\dot{\nu}(t) = \varepsilon \Omega'_{(3)}(0,t,\Omega(t,0,\nu(t)))g(t,\Omega(t,0,\nu(t))), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2.-11}$$

Рассмотрим произвольное T-периодическое решение x системы (1). Имеем

$$\nu(0) = \Omega(0,0,x(0)) = x(0) = x(T) = \Omega(T,0,\nu(T)).$$

Лемма доказана.

Обозначим через $U \subset \mathbb{R}^2$ внутренность цикла $\widetilde{x}$.

Для доказательства теоремы 2.1 рассмотрим вполне непрерывный интегральный оператор $Q_\varepsilon : C([0,T],\mathbb{R}^2) \to C([0,T],\mathbb{R}^2)$

$$(Q_\varepsilon x)(t) = x(T) + \int\limits_0^t f(x(\tau))d\tau + \varepsilon \int\limits_0^t g(\tau,x(\tau))d\tau, \quad t \in [0,T] \tag{2.-11}$$

на множестве

$$W_U = \left\{ \widehat{x} \in C([0,T],\mathbb{R}^2) : \widehat{x}(t) \in U, \text{ для любого } t \in [0,T] \right\}.$$

Через $d(I-F,W)$ будем обозначать степень Лерэ-Шаудера преобразования $I-F : \overline{W} \to \mathbb{R}^2$ относительно нуля (см. [19], Гл. I, §5). Иногда, чтобы подчеркнуть, что F задано в пространстве E мы будем писать $d_E(I-F,W)$.

Основную роль в доказательстве теоремы 2.1 играет следующая теорема.

Т е о р е м а 2.2. *Если*

$\widetilde{\Phi}^s(\xi) \neq 0$ *для любого* $\xi \in \partial U$ *и любого* $s \in [0, T]$,

то существует $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *справедливы следующие утверждения*

1) для любого $x \in C([0,T], \mathbb{R}^2)$ *такого, что* $Q_\varepsilon x = x$ *имеем* $x(t) \notin \partial U$ *для всех* $t \in [0,T]$, *в частности, оператор* Q_ε *не имеет неподвижных точек на* ∂W_U;

2) $d(I - Q_\varepsilon, W_U) = \mathrm{ind}(\widetilde{x}, \widetilde{\Phi}), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Утверждение 2) теоремы 2.2 впервые предложено в дипломной работе [22] автора и опубликовано в [12] (теорема 2). Формулировка результата о существовании периодических решений для возмущенной системы (1), непосредственно следующего из утверждения 2), впервые опубликована в [14](теорема 1). Поскольку доказательство одного лишь утверждения 1) почти совпадает с доказательством обоих утверждений 1) и 2), нам показалось целесообразным привести ниже полное доказательство теоремы 2.2. Тем более, оно значительно проще, чем приведенное в [12], где возмущенная система имеет два содержащих $\varepsilon > 0$ слагаемых и $\varepsilon > 0$ входит в эти слагаемые с разными степенями.

Теорема 2.2 является развитием результатов Дж. Мавена, который установил (см. [24] и [25]) похожие утверждения в случае нулевой или линейной порождающей системы. Хотя Мавен рассматривал случай пространства $\mathbb{R}^n$, доказательство теоремы 2.2 немедленно переносится и на n-мерный случай.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2.2. Положим

$$\Upsilon(t, \xi) = \Omega'_{(3)}(0, t, \Omega(t, 0, \xi)) g(t, \Omega(t, 0, \xi)).$$

Согласно лемме 2.4 каждой неподвижной точке из W_U оператора Q_ε соответствует неподвижная точка (2.4) оператора

$$(G_\varepsilon \nu)(t) = \Omega(T, 0, \nu(T)) + \int\limits_0^t \Upsilon(\tau, \nu(\tau)) d\tau,$$

которая, как легко проверить, вновь принадлежит W_U. Следовательно, если $d(I - G_\varepsilon, W_U)$ определен, то, в силу ([15], теорема 26.4), имеем

$$d(I - Q_\varepsilon, W_U) = d(I - G_\varepsilon, W_U).$$

В пространстве $C([0,T], \mathbb{R}^2)$ рассмотрим вспомогательный вполне непрерывный оператор

$$(A_\varepsilon \nu)(t) = \Omega(T, 0, \nu(T)) - \varepsilon \int\limits_0^T \Upsilon(\tau, \nu(\tau)) d\tau$$

и покажем, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ поля $I - G_\varepsilon$ и $I - A_\varepsilon$ гомотопны на границе множества W_U. Зададим следующую деформацию

$$D_\varepsilon(\lambda, \nu)(t) = \nu(t) - \Omega(T, 0, \nu(T)) - \varepsilon \int\limits_0^{\lambda t + (1-\lambda)T} \Upsilon(\tau, \nu(\tau)) d\tau,$$

соединяющую поля G_ε и $G_{1,\varepsilon}$. Покажем, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ деформация D_ε невырождена на границе множества W_U. Для этого будет доказано более сильное утверждение, которое будет использовано затем для доказательства утверждения 1), а именно покажем, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $\lambda \in [0,1]$ каждое решение уравнения $D_\varepsilon(\lambda, \nu) = \nu$ удовлетворяет условию

$\nu(t) \notin \partial U$ при всех $t \in [0, T]$. Предположим, что это не так. Тогда для произвольной последовательности $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty} \subset (0, 1]$ такой, что $\varepsilon \to 0$ при $k \to \infty$ найдутся последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [0, 1]$ и $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty} \subset C([0, T], \mathbb{R}^2)$, при которых

$$\nu_k(t) = \Omega(T, 0, \nu_k(T)) + \varepsilon_k \int\limits_0^{\lambda_k t + (1-\lambda_k)T} \Upsilon(\tau, \nu_k(\tau)) d\tau, \ \ t \in [0, T] \tag{2.-11}$$

и

$$\nu_k([0, T]) \cap \partial U \neq \emptyset. \tag{2.-11}$$

Так как последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена, то из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Поэтому, без ограничения общности можем считать, что последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится. Из (1) следует, что функции последовательности $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно ограничены. Поэтому, на основании непрерывности функции Υ найдется константа $c_0 > 0$ такая, что $\|\Upsilon(t, \nu_k(t))\| \leq c_0$, $t \in [0, T]$, $k \in \mathbb{N}$, и для любых $t_1, \ t_2 \in [0, T]$, $k \in \mathbb{N}$ имеем оценку

$$\|\nu_k(t_2) - \nu_k(t_1)\| = \varepsilon_k \left\| \int\limits_{\lambda_k t_1 + (1-\lambda_k)T}^{\lambda_k t_2 + (1-\lambda_k T)} \Upsilon(\tau, z_k(\tau)) d\tau \right\| \leq \varepsilon_k \lambda_k (t_2 - t_1) c_0,$$

из которой следует, что функции последовательности $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывны. Значит, применяя теорему Арцела, из этой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Поэтому мы без ограничения общности можем считать, что последовательность $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится. Положим $\lambda_0 = \lim_{k\to\infty} \lambda_k$ и $\nu_0 = \lim_{k\to\infty} \nu_k$. Тогда $\lambda_0 \in [0, 1]$ и $\nu_0([0, T]) \cap \partial U \neq \emptyset$. Так как $\dot{\nu}_k \to 0$ при $k \to \infty$, то функция ν_0 постоянна. Соотношение (1) эквивалентно существованию числа $t_k \in [0, T]$ такого, что $\nu_k(t_k) \in \partial U$. Тогда

$$\Omega(T, 0, \nu_k(t_k)) = \nu_k(t_k), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.-11}$$

Вычитая из равенства (1), записанного при $t = T$, это же равенство, записанное при $t = t_n$, получаем

$$\nu_k(T) - \nu_k(t_k) = \varepsilon_k \int\limits_{\lambda_k t_k + (1-\lambda_k)T}^{T} \Upsilon(\tau, \nu_k(\tau)) d\tau. \tag{2.-11}$$

На основании (1) выражение (1) при $t = T$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \nu_k(T) - \nu_k(t_k) = \Omega(T, 0, \nu_k(T)) - \Omega(T, 0, \nu_k(t_k)) + \\ + \varepsilon_k \int\limits_0^T \Upsilon(\tau, z_k(\tau)) d\tau, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (I - \Omega'_{(3)}(T, 0, \nu_k(t_k)))(\nu_k(T) - \nu_k(t_k)) = \\ = \varepsilon_k \int\limits_0^T \Upsilon(\tau, \nu_k(\tau)) d\tau + o(\nu_k(t_k), \nu_k(T) - \nu_k(t_k)), \end{aligned} \tag{2.-13}$$

где функция $o(\xi, h)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{\|o(\xi, h)\|}{\|h\|} \to 0, \text{ при } \|h\| \to 0, \ \xi \in \mathbb{R}^2. \tag{2.-13}$$

Подставляя (1) в (2.-12), получаем равенство

$$(I-\Omega'_{(3)}(T,0,\nu_k(t_k)))\int\limits_{\lambda_k t_k+(1-\lambda_k)T}^{T}\Upsilon(\tau,\nu_k(\tau))d\tau =$$

$$=\int\limits_0^T \Upsilon(\tau,\nu_k(\tau))d\tau+\frac{o(\nu_k(t_k),\nu_k(T)-\nu_k(t_k))}{\varepsilon_k}. \qquad (2.\text{-}13)$$

Из (1) следует, что найдется константа $c>0$ такая, что

$$\|\nu_k(T)-\nu_k(t_k)\|\le c\varepsilon_k.$$

Откуда

$$\left\|\frac{o(\nu_k(t_k),\nu_k(T)-\nu_k(t_k))}{\varepsilon_k}\right\|\le c\frac{\|o(\nu_k(t_k),\nu_k(T)-\nu_k(t_k))\|}{\|\nu_k(T)-\nu_k(t_k)\|}. \qquad (2.\text{-}13)$$

Из (1), учитывая то, что значения функций ν_k ограничены равномерно по $k\in\mathbb{N}$, следует, что

$$\left\|\frac{o(\nu_k(t_k),\nu_k(T)-\nu_k(t_k))}{\varepsilon_k}\right\|\to 0 \text{ при } k\to\infty. \qquad (2.\text{-}13)$$

Совершив, учитывая (1), предельный переход при $k\to\infty$ в (2.-12), получим

$$(I-\Omega'_{(3)}(T,0,\xi_0))\int\limits_s^T \Upsilon(\tau,\xi_0)d\tau=\int\limits_0^T \Upsilon(\tau,\xi_0)d\tau,$$

или

$$\int\limits_s^T \Omega'_{(3)}(T,0,\xi_0)\Omega'_{(3)}(0,\tau,\Omega(\tau,0,\xi_0))g(\tau,\Omega(\tau,0,\xi_0))d\tau -$$

$$-\int\limits_s^0 \Omega'_{(3)}(0,\tau,\Omega(\tau,0,\xi_0))g(\tau,\Omega(\tau,0,\xi_0))d\tau=0, \qquad (2.\text{-}13)$$

где $s=\lim_{k\to\infty}(\lambda_k t_k+(1-\lambda_k)T)\in[0,T]$. Пользуясь леммой 2.2 равенство (2.-12) можно переписать в виде

$$\eta(T,s,\xi_0)-\eta(0,s,\xi_0)=0,$$

в чем противоречие с предположением теоремы. Таким образом, существует $\varepsilon_0>0$ такое, что при всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ и $\lambda\in[0,1]$ каждое решение уравнения $D_\varepsilon(\lambda,\nu)=\nu$ удовлетворяет условию $\nu(t)\notin\partial U$ при всех $t\in[0,T]$. При $\lambda=1$ полученный результат совпадает с утверждением 1) теоремы. Перейдем к доказательству утверждения 2). Как уже говорилось, доказанное свойство означает, в частности, что

$$D_\varepsilon(\lambda,\nu)\ne 0,\ \lambda\in[0,1],\ \nu\in\partial W_U,\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0], \qquad (2.\text{-}13)$$

то есть поля $I-G_\varepsilon$ и $I-A_\varepsilon$ гомотопны на границе множества W_U при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$. Обозначим через $C_0([0,T],\mathbb{R}^2)$ подпространство пространства $C([0,T],\mathbb{R}^2)$, состоящее из всех постоянных функций, определенных на отрезке $[0,T]$ и принимающих значения в $\mathbb{R}^2$. Имеем $A_\varepsilon(\partial W_U)\subset C_0([0,T],\mathbb{R}^2)$. Далее, по построению множество W_U содержит функции, тождественно равные произвольному фиксированному элементу из U. Наконец, из (1) при $\lambda=0$ получаем

$$A_\varepsilon(\nu)\ne\nu,\ \nu\in\partial W_U,\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0],$$

откуда, учитывая соотношение $\partial(W_U \cap C_0([0,T],\mathbb{R}^2)) \subset \partial W_U$, следует, что при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ поле $I - A_\varepsilon$ не имеет нулей на границе множества $W_U \cap C_0([0,T],\mathbb{R}^2)$. Поэтому, при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ законно сужение поля $I - A_\varepsilon$ на подпространство $C_0([0,T],\mathbb{R}^2)$, что означает

$$d_{C([0,T],\mathbb{R}^2)}(I - A_\varepsilon, W_U) = d_{C_0([0,T],\mathbb{R}^2)}(I - A_\varepsilon, W_U \cap C_0([0,T],\mathbb{R}^2)), \tag{2.-13}$$

где в левой и правой частях равенства записаны топологические степени в пространствах $C([0,T],\mathbb{R}^2)$ и $C_0([0,T],\mathbb{R}^2)$ соответственно.

Заметим, что постоянная функция $\nu \in W_U \cap C_0([0,T],\mathbb{R}^2)$ тогда и только тогда является решением уравнения $A_\varepsilon \nu = \nu$, когда элемент $\xi = \nu(0)$ является решением уравнения $A^0_\varepsilon \xi = \xi$, где

$$A^0_\varepsilon \xi = \Omega(T,0,\xi) + \varepsilon \int\limits_0^T \Upsilon(\tau,\xi) d\tau.$$

Применяя теорему об эквивалентных уравнениях к уравнениям $A_\varepsilon \nu = \nu$ и $A^0_\varepsilon \xi = \xi$, а затем теорему о переходе к подпространству, при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ получаем

$$d_{C_0([0,T],\mathbb{R}^2)}(I - A_\varepsilon, W_U \cap C_0([0,T],\mathbb{R}^2)) = d_{\mathbb{R}^2}(I - A^0_\varepsilon, U). \tag{2.-13}$$

Для вычисления топологической степени $d_{\mathbb{R}^2}(I - A^0_\varepsilon, U)$ положим

$$A_{1,\varepsilon}\xi = -\varepsilon \int\limits_0^T \Upsilon(\tau,\xi) d\tau.$$

Так как $(I - A^0_\varepsilon)(\xi) = A_{1,\varepsilon}\xi,\ \ \xi \in \partial U$, то при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ имеем

$$d_{\mathbb{R}^2}(I - A^0_\varepsilon, U) = d_{\mathbb{R}^2}(A_{1,\varepsilon}, U). \tag{2.-13}$$

Покажем, что векторные поля $A_{1,\varepsilon}$ и $A_{1,1}$ гомотопны на границе множества U при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$. Зададим линейную деформацию

$$D_{1,\varepsilon}(\lambda,\xi) = (\lambda\varepsilon + 1 - \lambda) \int\limits_0^T \Upsilon(\tau,\xi) d\tau, \quad \xi \in U$$

и установим, что она невырождена на границе множества U. Предположим противное, тогда для некоторых $\lambda \in [0,1],\ \ \xi \in \partial U$ и $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ будем иметь

$$(\lambda_0\varepsilon + 1 - \lambda) \int\limits_0^T \Upsilon(\tau,\xi) d\tau = 0,$$

откуда

$$\int\limits_0^T \Upsilon(\tau,\xi) d\tau = 0,$$

что, в силу леммы 2.2, противоречит условиям теоремы. Таким образом, пользуясь леммой 2.2,

$$d_{\mathbb{R}^2}(A_{1,\varepsilon}, U) = d_{\mathbb{R}^2}(A_{1,1}, U) = d_{\mathbb{R}^2}(-\eta(T,0,\cdot), U). \tag{2.-13}$$

Подставляя (1) в (1), получаем

$$d_{\mathbb{R}^2}(I - A^0_\varepsilon, U) = d_{\mathbb{R}^2}(-\eta(T,0,\cdot), U),\ \ \varepsilon \in (0,\varepsilon_0). \tag{2.-13}$$

Подставляя (1) в (1), пользуясь гомотопностью полей $I-A_\varepsilon$ и $I-G_\varepsilon$ и соотношением (1), окончательно имеем

$$d_{C([0,T],\mathbb{R}^2)}(I-G_\varepsilon, W_U) = d_{\mathbb{R}^2}(-\eta(T,0,\cdot),U),\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0].$$

Но поле $\eta(T,0,\cdot)$ получается из поля $-\eta(T,0,\cdot)$ непрерывным поворотом всех векторов на 180^0 против часовой стрелки, следовательно

$$d_{\mathbb{R}^2}(-\eta(T,0,\cdot),U) = d_{\mathbb{R}^2}(\eta(T,0,\cdot),U).$$

По определению множества U и, пользуясь независимостью топологической степени от способа ее определения (см. [15], утверждение с. 17), имеем $d_{\mathbb{R}^2}(\eta(T,0,\cdot),U) = \mathrm{ind}(\widetilde{x},\eta(T,0,\cdot)) = \mathrm{ind}(\widetilde{x},\widetilde{\Phi})$.

Теорема доказана.

Все готово для того, чтобы перейти к доказательству теоремы 2.1.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть $\varepsilon_0>0$ то, о котором говорится в теореме 2.2, тогда, учитывая также леммы 2.1 и 2.3,

$$d(Q_\varepsilon, W_U) = \mathrm{ind}(\widetilde{x},\Phi) \quad \text{для любых } \varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$$

и пользуясь предположением (B),

$$d(Q_\varepsilon, W_U) \neq 1, \quad \text{для любых } \varepsilon\in(0,\varepsilon_0]. \tag{2.-13}$$

Положим $U_\delta^- = U\backslash B_\delta(\partial U)$, $U_\delta^+ = U\cup B_\delta(\partial U)$. Здесь и далее через $B_\delta(D)$ обозначена δ-окрестность множества D в норме содержащего D пространства. На основании условия (C) можно зафиксировать такое $\delta_0>0$, что порождающая система (1) не имеет T-периодических решений с начальными условиями из $\partial U_\delta^-\cup\partial U_\delta^+$ при всех $\delta\in(0,\delta_0]$. Без ограничения общности можем считать, что $\delta_0>0$ выбрано достаточно малым так, что $U_\delta^-\neq\emptyset$. По теореме Капетто-Мавена-Занолина ([4], Следствие 1) имеем

$$d(Q_0, W_{U_\delta^-}) = d_{\mathbb{R}^2}(f,U_\delta^-) \text{ и } d(Q_0, W_{U_\delta^+}) = d_{\mathbb{R}^2}(f,U_\delta^+) \quad \text{при всех } \delta\in(0,\delta_0].$$

Без ограничения общности можно считать, что малость $\delta_0>0$ достаточна для того, чтобы

$$d_{\mathbb{R}^2}(f,U_\delta^-) = d_{\mathbb{R}^2}(f,U_\delta^+) = d_{\mathbb{R}^2}(f,U), \quad \delta\in(0,\delta_0].$$

По теореме Пуанкаре (см. Лефшец [20, теорема 11.1] или Красносельский и др. [17, теорема 2.3]) имеем $d_{\mathbb{R}^2}(f,U)=1$, поэтому

$$d(Q_0, W_{U_\delta^-}) = d(Q_0, W_{U_\delta^+}) = 1 \quad \text{при всех } \delta\in(0,\delta_0].$$

Таким образом, каждому $\delta\in(0,\delta_0]$ соответствует $\varepsilon_\delta>0$ такое, что

$$d(Q_\varepsilon, W_{U_\delta^-}) = d(Q_\varepsilon, W_{U_\delta^+}) = 1 \quad \text{при всех } \varepsilon\in(0,\varepsilon_\delta] \text{ и } \delta\in(0,\delta_0]. \tag{2.-13}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon_\delta<\varepsilon_0$ при всех $\delta\in(0,\delta_0]$. Тогда, из (1) и (1) получаем, что при всех $\delta\in(0,\delta_0]$ и $\varepsilon\in(0,\varepsilon_\delta]$ система (1) имеет, по крайней мере, два T-периодических решения $x_{\varepsilon,1}\in W_U\backslash W_{U_\delta^-}$ и $x_{\varepsilon,2}\in W_{U_\delta^+}\backslash W_U$. Из этого, в частности, имеем $x_{\varepsilon,1}(0)\in U$, $x_{\varepsilon,2}(0)\notin U$ и, используя утверждение 1) теоремы 2.2, заключаем, что $x_{\varepsilon,1}(t)\in U$, $x_{\varepsilon,2}(t)\notin U$ при всех $t\in[0,T]$.

Теорема доказана.

§3. Вычисление индекса

В настоящем параграфе показывается, что если функция M имеет ровно два нуля на интервале $[0, T)$, то проверка условия (B) отличия от $+1$ индекса Пуанкаре, участвующего в формулировке теоремы 2.1, сводится к проверке алгебраического неравенства. Основным будет являться следующее утверждение.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть возмущение в (1) непрерывно. Предположим, что функция M_E имеет ровно два нуля θ_1 и θ_2 на интервале $[0, T)$. Тогда, если M_E строго монотонна в точках θ_1 и θ_2 и*

$$M_A(\theta_1) \cdot M_A(\theta_2) < 0,$$

то либо $\operatorname{ind}(\widetilde{x}, \Phi) = 0$, *либо* $\operatorname{ind}(\widetilde{x}, \Phi) = 2$.

Доказательство теоремы основано на следующей лемме.

Л е м м а 3.1. *(см. [21], Лемма 5) Пусть $q : [0, T] \to \mathbb{R}^2$, $q(0) = q(T)$ – жорданова кривая и $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ – непрерывное векторное поле такое, что $\psi(q(t)) \neq 0$ для каждого $t \in [0, T]$. Предположим, что существует направляющая функция $z : [0, T] \to \mathbb{R}^2$, $z(0) = z(T)$ такая, что:*

1) $\langle z(\theta), \dot{q}(\theta)\rangle \neq 0$ для каждого $\theta \in [0, T]$,

2) скалярная функция $\alpha(\theta) = \langle \psi(q(\theta)), z(\theta)\rangle$ имеет ровно два нуля θ_1, θ_2 на интервале $[0, T)$ и строго монотонна в этих точках,

3) $\operatorname{sign}\left\langle \psi(q(\theta_1)), \begin{pmatrix} z_2(\theta_1) \\ -z_1(\theta_1) \end{pmatrix} \right\rangle = -\operatorname{sign}\left\langle \psi(q(\theta_2)), \begin{pmatrix} z_2(\theta_2) \\ -z_1(\theta_2) \end{pmatrix} \right\rangle.$

Тогда либо $\operatorname{ind}(q, \psi) = 0$, *либо* $\operatorname{ind}(q, \psi) = 2$.

Отметим, что лемма 3.1 является уточнением теоремы Борсука-Улама [2] о четных векторных полях для рассматриваемого специального случая.

Д о к а з а т е л ь с т в о   т е о р е м ы   3.1. Используем лемму 3.1. Для этого выберем $q = \widetilde{x}$, $\psi = \Phi$, $z = \dot{\widetilde{x}}$. Имеем

$$\alpha(\theta) = -M_E(\theta) \quad \text{и} \quad \left\langle \Phi(\widetilde{x}(\theta)), \begin{pmatrix} \dot{\widetilde{x}}_2(\theta) \\ -\dot{\widetilde{x}}_1(\theta) \end{pmatrix} \right\rangle = -\left\langle \Phi(\widetilde{x}(\theta)), \dot{\widetilde{x}}(\theta)^{\perp} \right\rangle = -M_A(\theta).$$

То есть условия леммы 3.1 совпадают с предположениями доказываемой теоремы, что завершает доказательство.

З а м е ч а н и е 3.1 *Верна теорема, полученная из теоремы 3.1 заменой M_A на M_E и, соответственно, M_E на M_A.*

З а м е ч а н и е 3.2 *Аналогичные теореме 3.1 утверждения могут быть доказаны в случае, когда функция M_E имеет произвольное число нулей. В этом случае необходимо требовать, чтобы знаки функции M_A в этих нулях подходящим образом чередовались.*

§4. Сопоставление с теоремами Малкина и Мельникова

В первую очередь мы установим, что функция M_A совпадает с функцией Малкина в случае, когда выполнены условия Малкина (C_{MA}), а функция M_E с функцией Мельникова в случае, когда выполнены условия Мельникова (C_{ME}) и некоторые дополнительные свойства симметрии.

В работе [23] И. Г. Малкин в предположении (C_{MA}) определяет бифуркационную функцию $\widetilde{M}_A$ как (см. [23], формула 3.13)

$$\widetilde{M}_A(\theta) = \int_0^T \left\langle \widetilde{\widetilde{z}}(\tau), g(\tau - \theta, \widetilde{x}(\tau)) \right\rangle d\tau,$$

где $\widetilde{\widetilde{z}}$ – T-периодическое решение сопряженной системы (1), удовлетворяющее условию

$$\left\langle \widetilde{\widetilde{z}}(0), \dot{\widetilde{x}}(0) \right\rangle = 1. \tag{4.0}$$

В [23] отмечается, что такой выбор всегда возможен (см. [23], формулы 2.13 и 3.7). При условии (C_{MA}) такой выбор необходимо единственен, то есть функция Малкина определена однозначно. В этой же работе Малкин предлагает следующий результат (см. [23], утверждение с. 638).

Т е о р е м а М а л к и н а. *Пусть правая часть возмущенной системы (1) непрерывно дифференцируема и выполнены условия Малкина (C_{MA}). Если возмущенная система (1) имеет при достаточно малых $\varepsilon > 0$ T-периодическое решение $\widetilde{x}_\varepsilon$ такое, что*

$$\widetilde{x}_\varepsilon(t) \to \widetilde{x}^{\theta_0}(t) \quad \text{при } \varepsilon \to 0, \tag{4.0}$$

то

$$\widetilde{M}_A(\theta_0) = 0.$$

Если же вместе с указанным необходимым условием нуль θ_0 является простым, то есть $\widetilde{M}_A{}'(\theta_0) \neq 0$, то при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ возмущенная система (1) действительно имеет T-периодическое решение $\widetilde{x}_\varepsilon$, удовлетворяющее (1).

Следующее утверждение дает условие, при которых $M_A^s(\theta)$ не зависит от s и совпадает с $\widetilde{M}_A$.

Л е м м а 4.1 *Пусть выполнено условие Малкина (C_{MA}). Если $\widehat{y}$ является собственной функцией линеаризованной системы (1), то решение $\widehat{z}$ – T-периодическое. В частности,*

$$M_A^s(\theta) = \widetilde{M}_A(\theta) \quad \textit{при всех} \;\; s, \theta \in [0, T].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\widetilde{\widetilde{z}}$ – T-периодическая функция, участвующая в определении функции $\widetilde{M}_A$, и, следовательно, удовлетворяющая (1). Так как $\widehat{y}$ – собственная функция системы (1), то, учитывая условие (C_{MA}), существует $\rho \neq 1$ такое, что

$$\widehat{y}(T) = \rho \widehat{y}(0).$$

Но, в силу леммы Перрона (см. [34] или [9, Sec. III, §12]),

$$\left\langle \widetilde{\widetilde{z}}(0), \widehat{y}(0) \right\rangle = \left\langle \widetilde{\widetilde{z}}(T), \widehat{y}(T) \right\rangle,$$

что возможно только в случае, когда

$$\left\langle \widetilde{\widetilde{z}}(0), \widehat{y}(0) \right\rangle = 0.$$

С другой стороны по определению $\widehat{z}$

$$\left\langle \widehat{z}(0), \dot{\widetilde{x}}(0) \right\rangle = 1 \quad \text{и} \quad \langle \widehat{z}(0), \widehat{y}(0) \rangle = 0.$$

Таким образом, векторы $\widehat{z}(0)$ и $\widetilde{\widetilde{z}}(0)$ в скалярном произведении как с вектором $\dot{\widetilde{x}}(0)$, так и с вектором $\widehat{y}(0)$ принимают одни и те же значения. Следовательно $\widehat{z}(0) = \widetilde{\widetilde{z}}(0)$.

Лемма доказана.

Таким образом, при выполнении условий леммы 4.1 проверка условий теоремы 2.1 упрощается.

Обратимся теперь к случаю Мельникова (C_{ME}). В работе [26] Мельников вводит функцию (см. [26], формула для $A_0(v)$, с. 42)

$$\widetilde{M}_E(\theta) = \int_0^T \det \left\| \left(\dot{\widetilde{x}}(\tau), g(\tau - \theta, \widetilde{x}(\tau)) \right) \right\| d\tau.$$

и устанавливает следующий результат (см. [26], Лемма 7).

Т е о р е м а М е л ь н и к о в а. *Пусть правая часть возмущенной системы (1) дважды непрерывно дифференцируема и цикл $\widetilde{x}$ вложен в некоторое семейство циклов порождающей гамильтоновой системы (1). Пусть выполнены условия Мельникова (C_{ME}). Если возмущенная система (1) имеет при достаточно малых $\varepsilon > 0$ T-периодическое решение $\widetilde{x}_\varepsilon$, сходящееся к циклу $\widetilde{x}$ при $\varepsilon \to 0$ с точностью до сдвижки, то существует $\theta_0 \in [0, T]$ такое, что*

$$\widetilde{M}_E(\theta_0) = 0.$$

Если же вместе с указанным необходимым условием нуль θ_0 является простым, то есть $\widetilde{M}_E{}'(\theta_0) \neq 0$, то при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ возмущенная система (1) действительно имеет T-периодическое решение $\widetilde{x}_\varepsilon$ такое, что выполнено (1).

На самом деле, в цитированной работе Мельников рассматривал случай аналитических правых частей, но для интересующего нас утверждения действительно достаточно требовать двойной непрерывной дифференцируемости, соответствующая формулировка и доказательство имеется, например, в [8], теорема 4.6.2.

Для функции M_E^s условия ее независимости от s и совпадения с $\widetilde{M}_E$ получаются неодинаковыми. К выводу указанных условий мы переходим.

Установим вначале одно вспомогательное утверждение.

Л е м м а 4.2. *Предположим, что T-периодическая система*

$$\dot{u} = A(t)u, \quad u \in \mathbb{R}^2 \tag{4.0}$$

имеет мультипликатор $+1$ алгебраической кратности 2, и $\widetilde{u}$ – T-периодическое решение этой системы такое, что

$$\widetilde{u}_1(0) = 0, \ \widetilde{u}_2(0) \neq 0.$$

Тогда для решения $\widehat{u}$ системы (4.2), удовлетворяющего условию

$$\widehat{u}_1(0) \neq 0,\ \widehat{u}_2(0) = 0,$$

справедлива формула

$$\widehat{u}(t+T) = \widehat{u}(t) + \frac{\widehat{u}_2(T)}{\widetilde{u}_2(0)}\widetilde{u}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Обозначим через X нормированную ($X(0) = I$) фундаментальную матрицу системы (4.2). Так как $X(T_0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, то $X(T_0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$. По условию леммы $X(T)$ имеет два собственных значения $+1$, значит $X(T_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$, где $b \in \mathbb{R}$ – некоторое число. Имеем

$$\begin{aligned} X(t+T_0)\widehat{u}(0) &= X(t)X(T_0)\widehat{u}(0) = X(t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\widehat{u}(0) = X(t)\widehat{u}(0) + X(t)\begin{pmatrix} 0 \\ b\widehat{u}_1(0) \end{pmatrix} = \\ &= X(t)\widehat{u}(0) + \frac{b\widehat{u}_1(0)}{\widetilde{u}_2(0)}\widetilde{u}(t). \end{aligned}$$

В то же время

$$X(T_0)\widehat{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\widehat{u}(0) = \widehat{u}(0) + \begin{pmatrix} 0 \\ b\widehat{u}_1(0) \end{pmatrix},$$

откуда $b\widehat{u}_1(0) = \widehat{u}_2(T)$. Лемма доказана.

Следующая лемма утверждает, что выполнение условия Мельникова (C_{ME}) достаточно для независимости $M_E^s(\theta)$ от s (в случае Малкина были нужны дополнительные условия, см. лемму 4.2).

Лемма 4.3. *Если алгебраическая кратность мультипликатора $+1$ линеаризованной системы (1) равна 2, то решение $\widetilde{z}$ является T-периодическим. В частности, $M_E^s(\theta)$ не зависит от s.*

Условие леммы 4.3 выполнено как в случае Мельникова (C_{ME}), так и в вырожденном случае, когда каждое решение системы (1) является T-периодическим.

Доказательство леммы 4.3. Пусть $\theta \in [0, T]$ таково, что

$$\dot{\widetilde{x}}_1(\theta) = 0. \tag{4.-2}$$

Тогда функция $\dot{\widetilde{x}}^\theta$ является решением системы

$$\dot{y} = f'\left(\widetilde{x}(t+\theta)\right) y \tag{4.-2}$$

с начальными условием $\dot{\widetilde{x}}_1^\theta(0) = 0$. Обозначим через $\widehat{\widehat{y}}$ решение системы (1) с начальным условием $\widehat{\widehat{y}}(0) = (1, 0)$. Используя лемму 4.2, заключаем, что

$$\widehat{\widehat{y}}(T) = \widehat{\widehat{y}}(0) + \frac{\widehat{\widehat{y}}_2(T)}{\dot{\widetilde{x}}_2{}^\theta(0)}\dot{\widetilde{x}}^\theta(T). \tag{4.-2}$$

Если $\widehat{\widehat{y}}_2(T) = 0$, то из (1) имеем, что каждое решение системы (1), а значит и системы (1), является T-периодическим. Рассмотрим случай, когда

$$\widehat{\widehat{y}}_2(T) \neq 0. \tag{4.-2}$$

В силу теоремы о периодических решениях сопряженной системы (см. [9, Гл. III, §23, теорема 2]), система

$$\dot{z} = -\left(f'\left(\widetilde{x}(t+\theta)\right)\right)^* z \tag{4.-2}$$

имеет по крайней мере одно T-периодическое решение, обозначим это решение через $\widetilde{\widetilde{z}}$. Домножая равенство (1) скалярно на $\widetilde{\widetilde{z}}$, получаем

$$\left\langle \widehat{y}^\theta(T), \widetilde{\widetilde{z}}(T) \right\rangle = \left\langle \widehat{y}^\theta(0), \widetilde{\widetilde{z}}(T) \right\rangle + \frac{\widehat{y}_2^\theta(T)}{\dot{\widetilde{x}}_2{}^\theta(0)} \left\langle \dot{\widetilde{x}}^\theta(t), \widetilde{\widetilde{z}}(T) \right\rangle = \left\langle \widehat{y}^\theta(0), \widetilde{\widetilde{z}}(0) \right\rangle + \frac{\widehat{y}_2^\theta(T)}{\dot{\widetilde{x}}_2{}^\theta(0)} \dot{\widetilde{x}}_2^\theta(0) \widetilde{\widetilde{z}}_2(0).$$

Но в силу леммы Перрона (см. [34] или [9, Sec. III, §12]) $\left\langle \widehat{y}^\theta(T), \widetilde{\widetilde{z}}(T) \right\rangle = \left\langle \widehat{y}^\theta(0), \widetilde{\widetilde{z}}(0) \right\rangle$, поэтому $\widetilde{\widetilde{z}}_2(0) = 0$. Учитывая (1), заключаем $\left\langle \dot{\widetilde{x}}^\theta(0), \widetilde{\widetilde{z}}(0) \right\rangle = 0$ или

$$\left\langle \dot{\widetilde{x}}(0), \widetilde{\widetilde{z}}^{-\theta}(0) \right\rangle = 0.$$

Следовательно, векторы $\widetilde{\widetilde{z}}^{-\theta}(0)$ и $\widetilde{z}(0)$ линейно зависимы, то есть существует $a \neq 0$ такое, что $\widetilde{z}(0) = a\widetilde{\widetilde{z}}^{-\theta}(0)$. Но обе функции $\widetilde{\widetilde{z}}^{-\theta}$ и $\widetilde{z}$ является решениями одной и той же сопряженной системы (1), поэтому

$$\widetilde{z}(t) = a\widetilde{\widetilde{z}}^{-\theta}(t) \quad \text{при всех } t \in [0, T],$$

в частности, функция $\widetilde{z}$ – T-периодическая.

Лемма доказана.

Наконец, предъявим условия, при которых $M_E = \widetilde{M}_E$.

Л е м м а 4.4. *Пусть выполнено условие Мельникова (C_{ME}). Предположим, что для всех $\xi \in \mathbb{R}^2$ выполнено*

$$f_1(\xi) = f_1(-\xi_1, \xi_2), \tag{4.-2}$$

$$f_2(\xi) = -f_2(-\xi_1, \xi_2), \tag{4.-2}$$

$$(f_1)'_{(1)}(\xi) = -(f_2)'_{(2)}(\xi). \tag{4.-2}$$

Тогда для любого $\theta \in \mathbb{R}$ имеем

$$\widehat{z}(\theta) = \begin{pmatrix} \widehat{y}_2(\theta) \\ -\widehat{y}_1(\theta) \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{z}(\theta) = \begin{pmatrix} -\dot{\widetilde{x}}_2(\theta) \\ \dot{\widetilde{x}}_1(\theta) \end{pmatrix}$$

и, в частности,

$$\begin{aligned} M_E^s(\theta) &= \widetilde{M}_E(\theta), \\ M_A^s(\theta) &= -\int\limits_{s-T}^{s} \det \|(\widehat{y}(\tau), g(\tau - \theta, \widetilde{x}(\tau)))\| \, d\tau, \qquad s, \theta \in [0, T]. \end{aligned}$$

Для доказательства леммы 4.4 будет использовано следующее утверждение.

Л е м м а 4.5. *Рассмотрим линейную систему*

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) & d(t) \\ b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{4.-4}$$

Предположим, что $a(-t) = -a(t)$, $b(-t) = b(t)$, $d(-t) = d(t)$ для любых $t \in [c_1, c_2]$. Тогда, если y – некоторое решение системы (4.5), то функция $z(t) = (y_2(-t), y_1(-t))$ удовлетворяет на отрезке $[c_1, c_2]$ сопряженной к (4.5) системе.

Справедливость леммы 4.5 проверяется непосредственно подстановкой решения $z(t) = (y_2(-t), y_1(-t))$ в сопряженную систему.

Д о к а з а т е л ь с т в о   л е м м ы   4.4. Пусть $\tau \in [0, T]$ таково, что

$$\widetilde{x}_1^\tau(0) = 0.$$

Пользуясь условиями (4.4) и (4.4), легко проверить, что функция $p(t) = (-\widetilde{x}_1^\tau(-t), \widetilde{x}_2^\tau(-t))$ является решением порождающей системы (1). Но $p(0) = \widetilde{x}^\tau(0)$, следовательно

$$(-\widetilde{x}_1^\tau(-t), \widetilde{x}_2^\tau(-t)) = \widetilde{x}^\tau(t) \text{ для любого } t \in [0, T]. \tag{4.-4}$$

Рассмотрим линеаризованную на $\widetilde{x}^\tau$ порождающую систему (1)

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f_1)'_{(1)}(\widetilde{x}^\tau(t)) & (f_1)'_{(2)}(\widetilde{x}^\tau(t)) \\ (f_2)'_{(1)}(\widetilde{x}^\tau(t)) & (f_2)'_{(2)}(\widetilde{x}^\tau(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{4.-4}$$

Из условия (4.4) следует, что

$$(f_1)'_{(1)}(\widetilde{x}^\tau(t)) = -(f_2)'_{(2)}(\widetilde{x}^\tau(t)).$$

Из (4.4) имеем $-(f_1)'_{(1)}(-\xi_1, \xi_2) = (f_1)'_{(1)}(\xi_1, \xi_2)$ и, учитывая (1), получаем

$$(f_1)'_{(1)}(\widetilde{x}^\tau(t)) = -(f_1)'_{(1)}(\widetilde{x}^\tau(-t)). \tag{4.-4}$$

Из (4.4) имеем $-(f_2)'_{(1)}(\xi_1, \xi_2) = (f_2)'_{(1)}(-\xi_1, \xi_2)$ и, учитывая (1), получаем

$$(f_2)'_{(1)}(\widetilde{x}^\tau(-t)) = (f_2)'_{(1)}(\widetilde{x}^\tau(t)). \tag{4.-4}$$

Наконец, из (4.4) имеем $(f_1)'_{(2)}(-\xi_1, \xi_2) = (f_1)'_{(2)}(\xi_1, \xi_2)$ и, учитывая (1), получаем

$$(f_1)'_{(2)}(\widetilde{x}^\tau(t)) = (f_1)'_{(2)}(\widetilde{x}^\tau(-t)). \tag{4.-4}$$

Таким образом, выполнены условия леммы 4.5, на основании которой получаем, что функции

$$\widehat{\widetilde{z}}^\tau(t) = \begin{pmatrix} \widehat{y}_2^\tau(-t) \\ \widehat{y}_1^\tau(-t) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \widetilde{\widetilde{z}}^\tau(t) = \begin{pmatrix} \dot{\widetilde{x}}_2{}^\tau(-t) \\ \dot{\widetilde{x}}_1{}^\tau(-t) \end{pmatrix}$$

удовлетворяют сопряженной к (1) системе

$$\dot{z} = -\left(f'(\widetilde{x}^\tau(t))\right) z. \tag{4.-4}$$

Из (1) для любого $t \in [0, T]$ имеем

$$\dot{\widetilde{x}}_1{}^\tau(-t) = \dot{\widetilde{x}}_1{}^\tau(t), \quad -\dot{\widetilde{x}}_2{}^\tau(-t) = \dot{\widetilde{x}}_2{}^\tau(t). \tag{4.-4}$$

Покажем, что вместе с $\widehat{y}^\tau$ решением системы (1) является функция $p(t) = (-\widehat{y}_1^\tau(-t), \widehat{y}_2^\tau(-t))$. Действительно, из (1) и (1) имеем

$$\dot{p}_1(t) = -(f_1)'_{(1)}(\widetilde{x}^\tau(t)) y_1^\tau(-t) + (f_1)'_{(2)}(\widetilde{x}^\tau(t)) y_2^\tau(-t),$$

и из (1), (4.4) и (1) имеем

$$\dot{p}_2(t) = -(f_2)'_{(1)}(\widetilde{x}^\tau(t)) y_1^\tau(-t) + (f_2)'_{(2)}(\widetilde{x}^\tau(t)) y_2^\tau(-t).$$

Вместе с тем, из того, что $\left\langle \widehat{\widehat{z}}^0(0), \widetilde{x}^0(0) \right\rangle = 0$ в силу леммы Перрона (см. [34] или [9, Sec. III, §12]) имеем $\left\langle \widehat{\widehat{z}}^\tau(0), \widetilde{x}^\tau(0) \right\rangle = 0$, то есть

$$\left\langle \begin{pmatrix} \widehat{y}_2^\tau(0) \\ \widehat{y}_1^\tau(0) \end{pmatrix}, \widetilde{x}^\tau(0) \right\rangle = 0.$$

Но $\widetilde{x}_1^\tau(0) = 0$, поэтому из последнего равенства заключаем, что $\widehat{y}_1^\tau(0) = 0$. Полученное свойство позволяет утверждать, что $p(0) = \widehat{y}^\tau(0)$, поэтому

$$(-\widehat{y}_1^\tau(-t), \widehat{y}_2^\tau(-t)) = \widehat{y}^\tau(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.-4}$$

На основании (1) и (1) функции $\widehat{\widehat{z}}^\tau$ и $\widetilde{\widetilde{z}}^\tau$ можно переписать в виде

$$\widehat{\widehat{z}}^\tau(t) = \begin{pmatrix} \widehat{y}_2^\tau(t) \\ -\widehat{y}_1^\tau(t) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \widetilde{\widetilde{z}}^\tau(t) = \begin{pmatrix} -\dot{\widetilde{x}}_2{}^\tau(t) \\ \dot{\widetilde{x}}_1{}^\tau(t) \end{pmatrix}.$$

Так как функции $\widehat{\widehat{z}}^\tau$ и $\widetilde{\widetilde{z}}^\tau$ являются решениями сопряженной системы (1), то функции $\widehat{\widehat{z}}$ и $\widetilde{\widetilde{z}}$ являются решениями сопряженной системы (1). Но

$$\widehat{\widehat{z}}(0) = \begin{pmatrix} \widehat{y}_2(0) \\ -\widehat{y}_1(0) \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\dot{\widetilde{x}}(0)\|^2} \dot{\widetilde{x}}(0) = \widehat{z}(0),$$

$$\widetilde{\widetilde{z}}(0) = \begin{pmatrix} -\dot{\widetilde{x}}_2(0) \\ \dot{\widetilde{x}}_1(0) \end{pmatrix} = \widetilde{z}(0),$$

следовательно,

$$\widehat{z}(t) = \begin{pmatrix} \widehat{y}_2(t) \\ -\widehat{y}_1(t) \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{z}(t) = \begin{pmatrix} -\dot{\widetilde{x}}_2(t) \\ \dot{\widetilde{x}}_1(t) \end{pmatrix}.$$

Лемма доказана.

Таким образом, выполнение условий симметрии леммы 4.4 не только приводит функцию M_E к классической, но и упрощает вычисление функции M_A^s. Приведем одно следствие из леммы 4.2, которое также может быть использовано для упрощения вычисления функции M_A^s.

С л е д с т в и е 4.1. *Пусть алгебраическая кратность мультипликатора* $+1$ *линеаризованной системы (1) равна* 2 *и* $\widehat{z}_2(0) = 0$. *Тогда*

$$M_A^s(\theta) = M_A^T(0) - \frac{\widehat{z}_2(T)}{\widetilde{z}_2(0)} \int\limits_{s+\theta}^{T} \langle \widetilde{z}(\tau), g(\tau - \theta, \widetilde{x}(\tau)) \rangle \, d\tau.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя замену переменных $t = \tau + T$ в интеграле и лемму 4.2, можем провести следующее преобразование

$$M_A^s(\theta) = \int\limits_{s-T+\theta}^{s+\theta} \langle \widehat{z}(\tau), g(\tau - \theta, \widetilde{x}(\tau)) \rangle \, d\tau =$$

$$= \int\limits_{0}^{s+\theta} \langle \widehat{z}(\tau), g(\tau - \theta, \widetilde{x}(\tau)) \rangle \, d\tau + \int\limits_{s-T+\theta}^{0} \langle \widehat{z}(\tau), g(\tau - \theta, \widetilde{x}(\tau)) \rangle \, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{s+\theta} \langle \widehat{z}(\tau), g(\tau-\theta, \widetilde{x}(\tau))\rangle\, d\tau + \int\limits_{s+\theta}^{T} \langle \widehat{z}(t-T), g(t-\theta, \widetilde{x}(t))\rangle\, dt =$$

$$= \int\limits_0^{s+\theta} \langle \widehat{z}(\tau), g(\tau-\theta, \widetilde{x}(\tau))\rangle\, d\tau + \int\limits_{s+\theta}^{T} \left\langle \left(\widehat{z}(t) - \frac{\widehat{z}_2(T)}{\widetilde{z}_2(0)}\widetilde{z}(t)\right), g(t-\theta, \widetilde{x}(t))\right\rangle dt =$$

$$= \int\limits_0^{T} \langle \widehat{z}(\tau), g(\tau-\theta, \widetilde{x}(\tau))\rangle\, d\tau - \frac{\widehat{z}_2(T)}{\widetilde{z}_2(0)} \int\limits_{s+\theta}^{T} \langle \widetilde{z}(t), g(t-\theta, \widetilde{x}(t))\rangle\, dt =$$

$$= M_A^T(\theta) - \frac{\widehat{z}_2(T)}{\widetilde{z}_2(0)} \int\limits_{s+\theta}^{T} \langle \widetilde{z}(t), g(t-\theta, \widetilde{x}(t))\rangle\, dt.$$

Следствие доказано.

Закончив сопоставление функций M_A^s и M_E^s с классическими функциями $\widetilde{M}_A$ и $\widetilde{M}_E$ соответственно Малкина и Мельникова, переходим к сопоставлению теоремы 2.1 с соответствующими классическими теоремами. Именно, при помощи нескольких примеров будут сопоставлены заключения, к каким приводит теорема Мельникова и к каким теорема 2.1. Совершенно понятно, что заменой порождающих систем предлагаемых примеров на подходящие системы, допускающие T-периодический предельный цикл, сопоставление теоремы 2.1 может быть проведено и с теоремой Малкина. В качестве такой подходящей системы может быть рассмотрена, например, система

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{pmatrix},$$

допускающая единственный цикл $\widetilde{x}(\theta) = (\sin(\theta), \cos(\theta))$, и для которой, в частности, выполнены условия леммы 4.1 (см. [13], формула 37). Подробное сопоставление с одной лишь теоремой Мельникова в настоящей работе мотивировано еще и тем, что недавно мы получили обобщение сформулированной выше теоремы Малкина (см. [10], следствие 3.5), верное в пространстве произвольной размерности. Подход, предложенный в [10], использует условие типа (C_{MA}) и к случаю Мельникова не применим. Тоже самое условие предположено и в цитированной выше работе [21], где, в соответствующем случае, установлена формула вида (1).

В первом примере будет показано, что теорема 2.1 может уточнять результат теоремы Мельникова, а во втором, что она может устанавливать существование, по крайней мере, двух близких циклу $\widetilde{x}$ T-периодических решений в некоторых таких случаях, в которых теорема Мельникова гарантирует существование, по крайней мере, одного.

Сравнение будет проводиться в случае главного резонанса, то есть, когда наименьший период цикла $\widetilde{x}$ совпадает с наименьшим периодом возмущения, и более того, на его простом подслучае, когда функция M_E имеет ровно два нуля на интервале $[0, T)$. Такое ограничение позволит применить теорему 3.1 и провести сравнение наиболее легко и наглядно.

П р и м е р 4.1. *Пусть предложена система*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ -x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(wt) \end{pmatrix}. \tag{4.-4}$$

При $\varepsilon = 0$ система (4.1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ -x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{pmatrix} \tag{4.-4}$$

и допускает семейство периодических орбит

$$\left\{ \sqrt{1-\alpha} \begin{pmatrix} \sin(\alpha t) \\ \cos(\alpha t) \end{pmatrix} \right\}_{\alpha > 0}.$$

Рассмотрим задачу о существовании периодических орбит главного резонанса, то есть задачу о возмущении орбиты

$$\widetilde{x}(t) = \sqrt{1-w} \begin{pmatrix} \sin(wt) \\ \cos(wt) \end{pmatrix}$$

периода $T = 2\pi/w$, совпадающего с периодом возмущения. Так как

$$\dot{\widetilde{x}}(t) = w\sqrt{1-w} \begin{pmatrix} \cos(wt) \\ -\sin(wt) \end{pmatrix},$$

то функция Мельникова имеет вид

$$\widetilde{M}_E(\theta) = -\pi\sqrt{1-w}\sin(w\theta).$$

Функция $\widetilde{M}_E$ имеет, очевидно, два простых нуля $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \dfrac{\pi}{w}$ на интервале $[0, 2\pi/w)$ и теорема Мельникова гарантирует, что *при любых $w \in (0,1)$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$ система (4.1) имеет по крайней мере два T-периодических решения $\widetilde{x}_{\varepsilon,1}$ и $\widetilde{x}_{\varepsilon,2}$, сходящихся при $\varepsilon \to 0$ к циклу $\widetilde{x}$.*

Посмотрим теперь, какое утверждение позволяет получить теорема 2.1.

Заметим, что порождающая система (1) удовлетворяет условиям леммы 4.4, следовательно,

$$M_E^s(\theta) = \widetilde{M}_E(\theta) \quad \text{и} \quad M_A^s(\theta) = -\int_{s-T}^{s} \det\|(\widehat{y}(\tau), g(\tau - \theta, \widetilde{x}(\tau)))\|\, d\tau. \tag{4.-4}$$

Линеаризованная на $\widetilde{x}$ система (1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(1-w)\sin(wt)\cos(wt) & w - 2(1-w)\cos^2(wt) \\ -w + 2(1-w)\sin^2(wt) & 2(1-w)\sin(wt)\cos(wt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{4.-4}$$

Решение $\widehat{y}$ системы (1) с начальным условием

$$\widehat{y}(0) = \frac{1}{\|\dot{\widetilde{x}}(0)\|^2}\dot{\widetilde{x}}(0)^{\perp} = \frac{1}{w\sqrt{1-w}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

дается формулой

$$\widehat{y}(t) = \frac{1}{w\sqrt{1-w}} \begin{pmatrix} -2(1-w)t\cos(wt) + \sin(wt) \\ 2(1-w)t\sin(wt) + \cos(wt) \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} M_A^s(0) &= \frac{\pi}{w^3\sqrt{1-w}}\left(2(1-w)\sin^2(ws) - 1\right), \\ M_A^s(\pi/w) &= -\frac{\pi}{w^3\sqrt{1-w}}\left(2(1-w)\sin^2(ws) - 1\right). \end{aligned}$$

Таким образом, для выполнения условия (A) теоремы 2.1 необходимо, чтобы

$$w \in \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

При выполнении последнего условия имеем $M_A^s(0)M_A^s(\pi/w) < 0$ и в силу теоремы 3.1, условие (B) теоремы 2.1 об индексе также выполнено. Итак, на основании теоремы 2.1, имеем: *при любых $w \in (1/2, 1)$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$ система (4.1) имеет, по крайней мере, два $2\pi/w$-периодических решения $\widetilde{x}_{\varepsilon,1}$ и $\widetilde{x}_{\varepsilon,2}$, сходящихся при $\varepsilon \to 0$ к циклу $\widetilde{x}$. Решение $\widetilde{x}_{\varepsilon,1}$ лежит строго внутри цикла $\widetilde{x}$, а решение $\widetilde{x}_{\varepsilon,1}$ строго снаружи. Прочие $2\pi/w$-периодические решения системы (4.1) при указанных w и ε также не пересекают цикл $\widetilde{x}$.*

Мы получили, что для примера 4.1 область параметра $w > 0$, при которой применим метод Мельникова, шире области, при которой применима теорема 2.1, но в этой более узкой области теорема 2.1 позволяет указать новые свойства периодических решений главного резонанса.

Сейчас мы предъявим пример, в котором теорема 2.1 указывает не только новые свойства периодических решений главного резонанса, но и доказывает существование бо́льшего их числа.

П р и м е р 4.2. *Действительно, подправим систему предыдущего примера следующим образом*

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2\left(1 - \frac{1}{5}(x_1^2 + x_2^2)\right), \\
\dot{x}_2 &= -x_1\left(1 - \frac{1}{5}(x_1^2 + x_2^2)\right) + \varepsilon\left(\sin\left(\frac{4}{5}t\right) - x_1\right)^3 + \varepsilon x_1
\end{aligned} \tag{4.-6}$$

и изучим возмущение порождающей орбиты

$$\widetilde{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{4}{5}t\right) \\ \cos\left(\frac{4}{5}t\right) \end{pmatrix}$$

периода $T = \dfrac{5\pi}{2}$, совпадающего с периодом возмущения. Соответствующая этой задаче функция Мельникова записывается как

$$M_E(\theta) = \frac{3\pi}{4}\sin\left(\frac{8}{5}t\right) - \frac{3\pi}{2}\sin\left(\frac{4}{5}t\right)$$

и допускает два нуля $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \dfrac{5\pi}{4}$. Однако, только второй из них является простым, первый же является кубическим, то есть $M'(0) = 0$, $M''(0) = 0$ и $M'''(0) = -\dfrac{288\pi}{125}$.

Таким образом, из теоремы Мельникова заключаем, что *при достаточно малых $\varepsilon > 0$ система (4.2) имеет, по крайней мере, одно T-периодическое решение $\widetilde{x}_\varepsilon$, сходящееся при $\varepsilon \to 0$ к циклу $\widetilde{x}$.*

Легко проверить, что система (4.2) с $\varepsilon = 0$, линеаризованная на $\widetilde{x}$, совпадает с системой (1), в которой взято $w = 4/5$. Поэтому, учитывая, что начальное условие решения $\widehat{y}$ дается формулой

$$\widehat{y}(0) = \frac{1}{\|\dot{\widetilde{x}}(0)\|^2}\dot{\widetilde{x}}(0)^\perp = \frac{1}{4/5}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

заключаем, что

$$\widehat{y}(t) = \frac{1}{4/5}\begin{pmatrix} -\frac{2}{5}t\cos\left(\frac{4}{5}t\right) + \sin\left(\frac{4}{5}t\right) \\ \frac{2}{5}t\sin\left(\frac{4}{5}t\right) + \cos\left(\frac{4}{5}t\right) \end{pmatrix}.$$

Пользуясь леммой 4.4, а именно формулами (1), получаем для $M_A^s(0)$ и $M_A^s(5\pi/4)$ следующие выражения

$$\begin{aligned} M_A^s(0) &= -\frac{25\pi}{64}\cos\left(\frac{8}{5}s\right) - \frac{25\pi}{16}, \\ M_A^s(5\pi/4) &= -\frac{25\pi}{64}\cos\left(\frac{16}{5}s\right) + \frac{75\pi}{64}\cos\left(\frac{8}{5}s\right) + \frac{125\pi}{16}, \end{aligned}$$

для которых легко проверить, что $M_A^s(0) < 0$ и $M_A^s(5\pi/4) > 0$ при всех $s \in [0, 5\pi/2]$.

Значит, на основании теоремы 2.1 имеем: *при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ система (4.2) имеет, по крайней мере, два T-периодических решения $\widetilde{x}_{\varepsilon,1}$ и $\widetilde{x}_{\varepsilon,2}$, сходящихся при $\varepsilon \to 0$ к циклу $\widetilde{x}$. Решение $\widetilde{x}_{\varepsilon,1}$ лежит строго внутри цикла $\widetilde{x}$, а решение $\widetilde{x}_{\varepsilon,1}$ строго снаружи.*

Таким образом, наличие у функции Мельникова кратных корней не подрывает работоспособность теоремы 1.

Обратимся теперь к случаю, когда возмущение не является дифференцируемой функцией. Отметим, что вопрос о существовании периодических решений в возмущенных системах типа (1) в случае нулевой или линейной порождающей системы рассматривался Ю. А. Митропольским [28], А. М. Самойленко [38], Дж. Мавеном [24], [25], А. Буйка и Дж. Либри [3] и многими другими. В следующем примере демонстрируется применение теоремы 2.1 к системам с недифференцируемой правой частью при ненулевой нелинейной порождающей системе. В качестве возмущения выбрана, так называемая, прыгающая нелинейность, см. [18]. В качестве порождающей системы выбрано уравнение Дуффинга.

П р и м е р 4.3. *Рассмотрим задачу о существовании резонансных периодических решений у уравнения Дуффинга с прыгающей нелинейностью*

$$\ddot{u} + u + u^3 = \varepsilon(\mu x_1^+ + \nu x_1^- + \cos((1+\delta)t)). \tag{4.-8}$$

Установим следующую простую лемму.

Л е м м а 4.6. *Рассмотрим систему*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \varepsilon(\mu x_1^+ + \nu x_1^- + \cos(t)), \end{aligned} \tag{4.-8}$$

где $a^+ := \max\{a, 0\}$, $a^- := \max\{-a, 0\}$. Положим $\widetilde{\widetilde{x}}(t) = (\sin t, \cos t)$. Тогда, если $|\mu - \nu| \neq 2$, то соответствующие функции M_A^s и M_E^s удовлетворяют условию (A) теоремы 2.1. Если же $|\mu - \nu| < 2$, то

$$\mathrm{ind}(\widetilde{\widetilde{x}}, \Phi) \in \{0, 2\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$M_A^s(\theta) = \int_0^{2\pi} \sin\tau \left(\mu \widetilde{x}_1^+(\tau) + \nu \widetilde{x}_1^-(\tau) + \cos(\tau - \theta)\right) d\tau =$$

$$= \mu \int_0^{\pi} \sin\tau \sin\tau d\tau - \nu \int_{\pi}^{2\pi} \sin\tau \sin\tau d\tau + \int_0^{2\pi} \sin\tau \cos\tau d\tau \cos\theta + \int_0^{2\pi} \sin\tau \sin\tau d\tau \sin\theta =$$

$$= \mu\frac{\pi}{2} - \nu\frac{\pi}{2} + \pi\sin\theta,$$

$$M_E^s(\theta) = \int\limits_0^{2\pi} \cos\tau \left(\mu\widetilde{x}_1^+(\tau) + \nu\widetilde{x}_1^-(\tau) + \cos(\tau-\theta)\right) d\tau =$$

$$= \mu\int\limits_0^{\pi} \cos\tau\sin\tau d\tau - \nu\int\limits_{\pi}^{2\pi} \cos\tau\sin\tau d\tau + \int\limits_0^{2\pi} \cos\tau\cos\tau d\tau\cos\theta + \int\limits_0^{2\pi} \cos\tau\sin\tau d\tau\sin\theta =$$

$$= \pi\cos\theta.$$

Так как по условию леммы $|\mu - \nu| < 2$, то $\theta_0 = \arcsin\dfrac{-\mu+\nu}{2}$ будет единственным нулем функции M_E на интервале $[-\pi/2, \pi/2]$. Поэтому на интервале $[0, 2\pi)$ функция M_E имеет ровно два корня

$$\theta_1 = \begin{cases} \theta_1 = \theta_0, & \text{если } \theta_0 \geq 0, \\ \theta_1 = \theta_0 + \pi, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$
$$\theta_2 = \theta_1 + \pi.$$

Функция M_E имеет ровно два нуля $\theta_1 = \pi/2$ и $\theta_2 = 3\pi/2$ на интервале $[0, 2\pi)$. Для функции $M_A(\theta)$ в этих точках имеем

$$M_A(\pi/2) = \mu\frac{\pi}{2} - \nu\frac{\pi}{2} + \pi, \qquad M_A(3\pi/2) = \mu\frac{\pi}{2} - \nu\frac{\pi}{2} - \pi.$$

Таким образом, если $|\mu - \nu| \neq 2$, то

$$M_A(\pi/2) \neq 0, \qquad M_A(3\pi/2) \neq 0.$$

Если же $|\mu - \nu| < 2$, то

$$M_A(\pi/2) > 0, \qquad M_A(3\pi/2) < 0$$

и в силу теоремы 3.1 имеем $\operatorname{ind}(\widetilde{\widetilde{x}}, \Phi) \in \{0, 2\}$.

Лемма доказана.

Итак, вернемся к системе (4.3). Обозначим через u_δ единственную с точностью до сдвига периодическую орбиту порождающего уравнения

$$\ddot{u} + u + u^3 = 0$$

с наименьшим периодом $\dfrac{2\pi}{1+\delta}$. Если u – решение уравнения (4.3), то $v = (u, \dot{u})$ удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_2 \\ \dot{v}_2 &= -v_1 - v_1^3 + \varepsilon(\mu v_1^+ + \nu v_1^- + \cos((1+\delta)t)), \end{aligned} \tag{4.-8}$$

обратно, если v – решение системы (1), то v_1 – решение системы (4.3). Без ограничения общности для предлагаемого ниже утверждения можно считать, что $\dot{u}_\delta(0) = 0$ и $u_\delta(0) > 0$. Заменой переменных

$$x(t) = \frac{v(t)}{u_\delta(0)}$$

перейдем от системы (1) к системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - (u_\delta(0))^2 x_1^3 + \varepsilon\frac{1}{u_\delta(0)}\cos((1+\delta)t) + \varepsilon(\mu x_1^+ + \nu x_1^-). \end{aligned} \tag{4.-8}$$

Пусть $|\mu-\nu|<2$. Установим, что существует $\delta_0>0$ такое, что при $\delta\in(0,\delta_0]$ условия теоремы 2.1, связанные с функциями M_E^s, M_A^s и Φ, для системы (1) выполнены с $\widetilde{x}(t)=\dfrac{v_\delta(t)}{u_\delta(0)}$ и $T=\dfrac{2\pi}{1+\delta}$. Для этого, в свою очередь, достаточно установить аналогичное утверждение для системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_1-(u_\delta(0))^2x_1^3+\varepsilon\cos((1+\delta)t)+\varepsilon(\mu x_1^+ + \nu x_1^-).\end{aligned} \tag{4.-8}$$

Период орбит порождающей системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_1-(u_\delta(0))^2x_1^3\end{aligned}$$

изменяется монотонно от 2π до 0, когда начальное условие орбиты изменяется от $(0,0)$ до $(+\infty,0)$ (см., напр., [8, пример с. 250]). Следовательно, $u_\delta(0)\to 0$, когда $\delta\to 0$. Но для $\delta=0$ справедливость желаемого для системы (1) утверждения следует из леммы 4.6, следовательно, это утверждение остается справедливым и при малых $\delta>0$.

Итак, установлено, что *если $|\mu-\nu|<2$, то существует $\delta_0>0$ такое, что каждому $\delta\in[0,\delta_0]$ соответствует $\varepsilon_0>0$ такое, что:*

1) при каждом $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ возмущенное уравнение Дуффинга (4.3) имеет, по крайней мере, два $\frac{2\pi}{1+\delta}$-периодических решения $\widetilde{u}_{\delta,\varepsilon}$, $\widetilde{\widetilde{u}}_{\delta,\varepsilon}$ таких, что кривая $t\to\left(\widetilde{u}_{\delta,\varepsilon}(t),\dot{\widetilde{u}}_{\delta,\varepsilon}(t)\right)$ лежит строго внутри кривой $t\to(u_\delta(t),\dot{u}_\delta(t))$, а кривая $t\to\left(\widetilde{\widetilde{u}}_{\delta,\varepsilon}(t),\dot{\widetilde{\widetilde{u}}}_{\delta,\varepsilon}(t)\right)$ строго снаружи;

2) для всякого $\frac{2\pi}{1+\delta}$-периодического решения u системы (4.3) с $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ кривая $t\to(u(t),\dot{u}(t))$ не имеет точек пересечения с кривой $t\to(u_\delta(t),\dot{u}_\delta(t))$;

3) решения $\widetilde{u}_{\delta,\varepsilon}$ и $\widetilde{\widetilde{u}}_{\delta,\varepsilon}$ удовлетворяют условию

$$\widetilde{u}_{\delta,\varepsilon}(t)\to u_\delta\left(t-\widetilde{\theta}\right)\quad и\quad \widetilde{\widetilde{u}}_{\delta,\varepsilon}(t)\to u_\delta\left(t-\widetilde{\widetilde{\theta}}\right)\quad при\ \varepsilon\to 0$$

для некоторых $\widetilde{\theta},\widetilde{\widetilde{\theta}}\in\left[0,\frac{2\pi}{1+\delta}\right]$.

Если $\nu=\mu=0$, то полученное утверждение является добавлением к известным результатам о качественном поведении периодических траекторий уравнения Дуффинга, см., напр., А. Д. Морозов [30].

§5. Вырожденные резонансы. Сопоставление с теоремой Йагасаки

В настоящем параграфе рассматривается случай, когда T-периодический цикл $\widetilde{x}$ является вырожденным, то есть все решения линеаризованной системы (1) являются T-периодическими. T-периодические решения возмущенной системы, порожденные такими циклами, называются вырожденными резонансами. Если $\widetilde{x}$ вложен в семейство циклов $\{\widetilde{x}_\alpha\}_{\alpha>0}$ автономной системы с периодами $T(\alpha)$, то есть, если

$$\widetilde{x}=\widetilde{x}_{\alpha_0}$$

для некоторого $\alpha_0>0$, то, как показывает нижеследующая лемма, предположение о вырожденности почти всегда выполнено в случае, когда $T(\alpha_0)$ является критическим периодом, то есть

$$T'(\alpha_0)=0. \tag{5.0}$$

Отметим, что задача о существовании критических периодов для циклов, вложенных в семейство циклов автономной системы, интенсивно исследуется, см. [5], [6], [7], [40].

Не ограничивая общности можем считать далее, что

$$\widetilde{x}_\alpha(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ J(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Л е м м а 5.1. *Если для орбиты $\widetilde{x}_{\alpha_0}$ выполнены условия $T'(\alpha_0) = 0$, $J'(\alpha_0) \neq 0$ и первая компонента вектора $\dot{\widetilde{x}}_{\alpha_0}(0)$ отлична от нуля, то каждое решение линеаризованной системы (1) с $\widetilde{x} = \widetilde{x}_{\alpha_0}$ является $T(\alpha_0)$-периодическим.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нам будет удобно использовать следующее обозначение

$$x(t,\alpha) := \widetilde{x}_\alpha(t).$$

Так как правая часть порождающей системы (1) непрерывно дифференцируема, то (см., напр., Понтрягин [35], Гл. 4, § 24, теорема 17]) функция $(t,\alpha) \to x(t,\alpha)$ непрерывно дифференцируема по совокупности переменных. Дифференцируя тождество

$$x'_t(t,\alpha) = f(x(t,\alpha))$$

по α, получаем

$$x''_{t\alpha}(t,\alpha) = f'(x(t,\alpha))x'_\alpha,$$

следовательно, $\widetilde{y} = x'_\alpha(\cdot,\alpha_0)$ является решением линеаризованной системы (1), в которой $\widetilde{x} = x(\cdot,\alpha_0)$. Имеем

$$\begin{aligned}
\widetilde{y}(T(\alpha_0)) - \widetilde{y}(0) &= \lim_{\Delta\to 0} \frac{x(T(\alpha_0),\alpha_0+\Delta) - x(T(\alpha_0),\alpha_0)}{\Delta} - \lim_{\Delta\to 0} \frac{x(0,\alpha_0+\Delta) - x(0,\alpha_0)}{\Delta} = \\
&= \lim_{\Delta\to 0} \frac{x(T(\alpha_0),\alpha_0+\Delta) - x(0,\alpha_0+\Delta) - x(T(\alpha_0),\alpha_0) + x(0,\alpha_0)}{\Delta} = \\
&= \lim_{\Delta\to 0} \frac{x(T(\alpha_0),\alpha_0+\Delta) - x(0,\alpha_0+\Delta)}{\Delta} = \\
&= \left(x(T(\cdot),\alpha_0)\right)'(\alpha_0) = x'_t(T(\alpha_0),\alpha_0)T'(\alpha_0) = 0, \qquad (5.\text{-}2)
\end{aligned}$$

то есть $\widetilde{y}$ является $T(\alpha_0)$-периодическим решением системы (1). Но $x(0,\alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ J(\alpha) \end{pmatrix}$, следовательно

$$\widetilde{y}(0) = x'_\alpha(0,\alpha_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ J'(\alpha_0) \end{pmatrix}.$$

В тоже время, согласно условиям леммы, первая компонента вектора $\dot{\widetilde{x}}_{\alpha_0}(0)$ отлична от нуля, значит $\widetilde{y}$ и $x'_t(\cdot,\alpha_0)$ – два линейно-независимых $T(\alpha_0)$-периодических решения (двумерной) системы (1), что, очевидно, влечет желаемое утверждение.

Лемма доказана.

Лемма 5.1 является критерием вырожденности цикла, вложенного в семейство циклов. Однако, для вырожденности цикла вовсе не необходимо чтобы он был вложен в семейство циклов, вырожденными могут быть и изолированные циклы. Для изучения существования в возмущенной системе (1)

вырожденных резонансов в этом последнем случае может, вообще говоря, использоваться общая теорема Рума-Чиконе ([37], теорема 4.1), но она работает только в случае, когда возмущение зависит от фазовой переменной (см. [37], формула 2.7), что не требуется в предлагаемых ниже теоремах.

Если цикл $\widetilde{x}$ является вырожденным, то функции M_A^s и M_E^s очевидно, не зависят от s и теорема 2.1 принимает следующий вид.

Т е о р е м а 5.1. *Пусть для вырожденного цикла $\widetilde{x}$ выполнено условие (C) и возмущение непрерывно. Предположим, что для любого $\theta_0 \in [0,T]$ такого, что $M_E(\theta_0)=0$ имеем*

$$M_A(\theta_0) \neq 0.$$

Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ всякое T-периодическое решение $\widetilde{x}_\varepsilon$ возмущенной системы (1) необходимо таково, что

$$\widetilde{x}_\varepsilon(t) \neq \widetilde{x}(s) \quad \text{при всех } t,s \in [0,T]. \tag{5.-2}$$

Если же имеем еще и

$$\mathrm{ind}(\widetilde{x}, \Phi) \neq 1,$$

то при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ возмущенная система (1) действительно имеет, по крайней мере, два T-периодических решения $\widetilde{x}_{\varepsilon,1}$ и $\widetilde{x}_{\varepsilon,2}$, удовлетворяющих (5.1). Оба решения сходятся к $\widetilde{x}$ при $\varepsilon \to 0$. Кроме того, решение $\widetilde{x}_{\varepsilon,1}$ лежит внутри цикла $\widetilde{x}$, а решение $\widetilde{x}_{\varepsilon,2}$ снаружи.

Условия теоремы 2.1 приобретают максимально простой вид, если дополнительно к вырожденности известно, что функция M_E имеет ровно два нуля на $[0,T)$. По этой причине мы сформулируем соответствующее утверждение как отдельную теорему.

Т е о р е м а 5.2. *Пусть для вырожденного цикла $\widetilde{x}$ выполнено условие (C) и возмущение непрерывно. Предположим, что функция M_E имеет ровно два нуля θ_1 и θ_2 на интервале $[0,T)$ и*

$$M_A(\theta_1) \cdot M_A(\theta_2) \neq 0.$$

Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ всякое T-периодическое решение $\widetilde{x}_\varepsilon$ возмущенной системы (1) необходимо удовлетворяет условию (5.1). Если же дополнительно известно, что

$$M_A(\theta_1) \cdot M_A(\theta_2) < 0,$$

то при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ возмущенная система (1) действительно имеет, по крайней мере, два T-периодических решения $\widetilde{x}_{\varepsilon,1}$ и $\widetilde{x}_{\varepsilon,2}$, удовлетворяющих (5.1). Оба решения сходятся к $\widetilde{x}$ при $\varepsilon \to 0$. Кроме того, решение $\widetilde{x}_{\varepsilon,1}$ лежит внутри цикла $\widetilde{x}$, а решение $\widetilde{x}_{\varepsilon,2}$ снаружи.

Ясно, что верна теорема, полученная из теоремы 5.2 перестановкой функций M_E и M_A между собой.

Насколько известно автору, в литературе исследован только тот случай, когда вырожденный цикл вложен в семейство циклов и имеет критический период. Поэтому, именно такую ситуацию мы предположим далее для тестирования теоремы 5.2. В этом случае условия, связанные с применением теорем

о неявной функции, напротив, усложняются и существенно зависят от того, какова кратность нуля α_0 для функции T. Так К. Йагасаки [39] рассмотрел случай, когда

$$T'(\alpha_0) = 0, \quad T''(\alpha_0) \neq 0.$$

Помимо условия существования простого корня θ_0 у функции Мельникова, в работе цитированного автора требуется, чтобы некоторая вспомогательная функция N, формула которой содержит двойной интеграл, имела в точке θ_0 определенный знак. Полученную теорему Йагасаки иллюстрирует на нескольких примерах, некоторую модификацию одного из них ([39], пример § 6.4) мы выберем для сравнения этой теоремы с теоремой 5.2.

П р и м е р 5.1. *Действительно, рассмотрим систему*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \left(\frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2 - 2)^p + 1 \right) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 \left(\frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2 - 2)^p + 1 \right) + \varepsilon \sin(t). \end{aligned} \tag{5.-2}$$

Порождающая система допускает семейство циклов

$$\widetilde{x}_\alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha \sin\left(\dfrac{2\pi}{T(\alpha)} t\right) \\ \alpha \cos\left(\dfrac{2\pi}{T(\alpha)} t\right) \end{pmatrix}$$

с периодами

$$T(\alpha) = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}(\alpha^2 - 2)^p + 1}.$$

Исследуем возмущение цикла, соответствующего $\alpha = \sqrt{2}$, то есть цикла

$$\widetilde{x}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \sin t \\ \sqrt{2} \cos t \end{pmatrix},$$

для которого

$$T\left(\sqrt{2}\right) = 2\pi, \quad T'\left(\sqrt{2}\right) = \dots = T^{(p-1)}\left(\sqrt{2}\right) = 0, \quad T^{(p)}\left(\sqrt{2}\right) \neq 0.$$

В случае $p = 2$ для системы (5.1) Йагасаки вычисляет упомянутую функцию N и приводит следующее утверждение (см. [39], теорема 6.4): *Для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ система (5.1) имеет, по крайней мере, два T-периодических решения $\widetilde{x}_{\varepsilon,1}$ и $\widetilde{x}_{\varepsilon,2}$, сходящихся к $\widetilde{x}$ при $\varepsilon \to 0$.*

Так как при $p \neq 2$ критический период 2π не является двукратным, то при $p \neq 2$ результат Йагасаки не применим.

Попробуем использовать теорему 5.2. Линеаризованная на цикле $\widetilde{x}$ порождающая система при любом натуральном p имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$\widehat{y}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Таким образом, при любом натуральном p имеем

$$M_E(\theta) = -\sqrt{2}\pi\sin(\theta), \quad M_A(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi\cos(\theta).$$

Функция M имеет два нуля $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \pi$ на интервале $[0, T)$, причем $M_A(0) \cdot M_A(\pi) < 0$. Таким образом, выполнены условия теоремы 5.2, на основании которой получаем утверждение: *Пусть $p \in \mathbb{N}$ – произвольное число. Для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ система (5.1) имеет, по крайней мере, два T-периодических решения $\widetilde{x}_{\varepsilon,1}$ и $\widetilde{x}_{\varepsilon,2}$, сходящихся к $\widetilde{x}$ при $\varepsilon \to 0$. Решения $\widetilde{x}_{\varepsilon,1}$ лежат строго внутри цикла $\widetilde{x}$ а решения $\widetilde{x}_{\varepsilon,1}$ строго снаружи.*

Таким образом, при $p = 2$ полученное из теоремы 5.2 утверждение уточняет результат Йагасаки и дает точно такое заключение при любой другой кратности вырождения, где указанный результат не применим. В тоже время стоит отметить, что рассматриваемая теорема Йагасаки ([39], теорема 6.4) гарантирует для некоторых систем (при $p = 2$) существование, по крайней мере, четырех периодических решений, в то время как теорема 5.2 всегда гарантирует существование, по крайней мере, двух.

В заключение параграфа отметим, что поведение траекторий возмущенной гамильтоновой системы вблизи цикла с критическим периодом исследовано в [29] и [31].

§6. Расположение устойчивых и неустойчивых периодических решений

Теоремы Малкина, Мельникова и Йагасаки, как основанные на теореме о неявной функции, предоставляют также информацию об устойчивости рожденных из цикла $\widetilde{x}$ периодических решений возмущенной системы (1). В настоящем параграфе будет показано, что знание индекса $\mathrm{ind}(\widetilde{x}, \Phi)$ позволяет в некоторых случаях утверждать, по какую сторону от цикла находится, по крайней мере, одно устойчивое решение, а по какую сторону, по крайней мере, одно неустойчивое.

Предположим, что

$(A_{\mathcal{P}})$ решение $x =: \Omega_\varepsilon(\cdot, t_0, \xi)$ возмущенной системы (1) с начальным условием $x(t_0) = \xi$ существует, единственно и продолжимо на отрезок $[0, T]$ при любых $t_0 \in [0, T]$, $\xi \in \mathbb{R}^2$ и $\varepsilon > 0$.

Следовательно, для системы (1) при любых $\varepsilon > 0$ определен оператор Пуанкаре-Андронова $\mathcal{P}_\varepsilon = \Omega_\varepsilon(T, 0, \cdot)$, соответствующий задаче о T-периодических решениях для (1).

Т е о р е м а 6.1. *Пусть возмущение в (1) непрерывно. Пусть выполнено условие (A) теоремы 2.1 и условие $(A_{\mathcal{P}})$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что*

$$\widetilde{x}(\theta) \neq \mathcal{P}_\varepsilon(\widetilde{x}(\theta)) \quad \textit{при всех} \;\; \theta \in [0, T], \;\; \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$$

и

$$\mathrm{ind}(\widetilde{x}, I - \mathcal{P}_\varepsilon) = \mathrm{ind}(\widetilde{x}, \Phi), \qquad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Q_ε – интегральный оператор, соответствующий задаче о T-периодических решениях для возмущенной системы (1) и определяемый формулой (1). Обозначим через $U \subset \mathbb{R}^2$ внутренность цикла $\widetilde{x}$ и положим

$$W_\varepsilon = \left\{ \hat{x} : C([0, T], \mathbb{R}^2) : \Omega_\varepsilon(0, t, \hat{x}(t)) \in U, \text{ for any } t \in [0, T] \right\}.$$

Покажем, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и любого $\alpha \in [0, \varepsilon_0]$ выполнено:

$$\text{если } Q_\varepsilon x = x \text{ и } x \in \overline{W}_\alpha \text{ то, } x \in W_0. \tag{6.0}$$

Предположим противное, следовательно существуют последовательности $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, \varepsilon_0]$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,T], \mathbb{R}^2)$, $x_n \in \overline{W}_{\alpha_n}$ такие, что $Q_{\varepsilon_n} x_n = x_n$ и $x_n \notin W_0$. Так как $x_n \in \overline{W}_{\varepsilon_n}$, то $x_n(0) \in U$. С другой стороны из соотношения $x_n \notin W_0$ заключаем, что при любом $n \in \mathbb{N}$ существует $t_n \in (0, T]$ такое, что $x_n(t_n) \in \partial U$, в чем противоречие с утверждением 1) теоремы 2.2.

Из (1) и утверждения 1) теоремы 2.2 заключаем, что степень $d(I - Q_\varepsilon, W_\alpha)$ определена при любом $\alpha \in (0, \varepsilon_0]$ и

$$d(I - Q_\varepsilon, W_\varepsilon) = d(I - Q_\varepsilon, W_0), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Из принципа родственности (см. [15], теорема 28.5) следует, что

$$d(I - Q_\varepsilon, W_\varepsilon) = \operatorname{ind}(\widetilde{x}, I - \mathcal{P}_\varepsilon).$$

С другой стороны, в силу утверждения 2) теоремы 2.2 имеем

$$d(I - Q_\varepsilon, W_0) = \operatorname{ind}(\widetilde{x}, \Phi).$$

Теорема доказана.

Нам также необходима следующая лемма, установленная Капетто, Мавеном и Занолином.

Л е м м а К а п е т т о - М а в е н а - З а н о л и н а. (см. [4], Следствие 2). *Пусть выполнено условие (C) и возмущение непрерывно. Пусть выполнено условие ($A_\mathcal{P}$). Тогда для любой достаточно близкой к циклу $\widetilde{x}$ и непересекающей его T-периодической функции $\widehat{x}$ имеет место равенство*

$$\operatorname{ind}(\widehat{x}, I - \mathcal{P}_0) = 1. \tag{6.0}$$

Доказательство леммы Капетто-Мавена-Занолина использует теорему Купки-Смейла (см. [33], Гл. 3).

Итак, пользуясь индексом $\operatorname{ind}(\widetilde{x}, \Phi)$, имеем следующую информацию о расположении устойчивых и неустойчивых T-периодических решений возмущенной системы (1) вблизи порождающего цикла $\widetilde{x}$.

Т е о р е м а 6.2. *Пусть выполнены условия теоремы (6.1), а также условие (C). Выберем произвольные T-периодические функции $\widetilde{x}^-$ и $\widetilde{x}^+$ такие, что $\widetilde{x}^-$ лежит внутри цикла $\widetilde{x}$, а $\widetilde{x}^+$ – снаружи, причем в области V^-, заключенной между $\widetilde{x}^-$ и $\widetilde{x}$, а также в области V^+, заключенной между $\widetilde{x}$ и $\widetilde{x}^+$, нет T-периодических решений порождающей системы (1). Пусть дополнительно известно, что все неподвижные точки оператора Пуанкаре-Андронова $\mathcal{P}_\varepsilon$ в V^- и V^+ являются простыми. Тогда, если*

$$\operatorname{ind}(\widetilde{x}, \Phi) > 1 \quad (\operatorname{ind}(\widetilde{x}, \Phi) > 1)\,,$$

то множество V^+ (V^-) содержит, по крайней мере,

$$\mu = |\operatorname{ind}(\widetilde{x}, \Phi) - 1|$$

неподвижных точек оператора $\mathcal{P}_\varepsilon$, являющихся седлами, а множество V^- (V^+) содержит, по крайней мере, μ неподвижных точек оператора $\mathcal{P}_\varepsilon$, каждая из которых либо узел, либо фокус.

Отметим, что выбор указанных в формулировке циклов $\widetilde{x}^-$ и $\widetilde{x}^+$ возможен в силу предположения (C).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$\mathrm{ind}(\widetilde{x}, \Phi) > 1.$$

Тогда, в силу теоремы 6.1 и теоремы Капетто-Мавена-Занолина, имеем

$$d(\Phi, V^-) > \mu \quad \text{и} \quad d(\Phi, V^+) < \mu.$$

Следовательно (см. [1], Гл. V, § 11, теорема 26 и лемма 1), существует, по крайней мере, μ точек $\xi_1^-, ..., \xi_\mu^-$,

$$\xi_i^- \in V^- \text{ для любого } i \in \overline{1, \mu},$$

и, по крайней мере, μ точек $\xi_1^+, ..., \xi_\mu^+$,

$$\xi_i^+ \in V^+ \text{ для любого } i \in \overline{1, \mu},$$

таких, что

$$\mathrm{ind}(\xi_i^-) = +1 \quad \text{и} \quad \mathrm{ind}(\xi_i^+) = -1 \text{ для любого } i \in \overline{1, \mu},$$

то есть (см. [1], Гл. V, § 11, теорема 30) каждая из точек ξ_i^-, $i \in \overline{1, \mu}$, является узлом или фокусом, а каждая из точек ξ_i^+, $i \in \overline{1, \mu}$, – седлом.

Случай, когда $\mathrm{ind}(\widetilde{x}, \Phi) < 1$, рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

Развитие теоремы 6.2 может быть получено на основе схем, предложенных в [32].

§7. Заключение

Итак, в работе для исследования задачи о рождении T-периодических решений возмущенной системы (1) из T-периодического цикла $\widetilde{x}$ порождающей системы (1) предложена новая характеристика порождающего цикла $\mathrm{ind}(\widetilde{x}, \Phi)$. Даны условия, при которых из свойства $\mathrm{ind}(\widetilde{x}, \Phi) \neq 1$ следует, что цикл $\widetilde{x}$ порождает по крайней мере два T-периодических решения возмущенной системы (1), лежащих по разные стороны от $\widetilde{x}$. В зависимости от того $\mathrm{ind}(\widetilde{x}, \Phi) > 1$ или $\mathrm{ind}(\widetilde{x}, \Phi) < 1$ делаются некоторые выводы о том, по какую сторону от $\widetilde{x}$ рождаются устойчивые T-периодические решения и по какую неустойчивые.

Литература

[1] Андронов, А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И. и Майер А. Г., Качественная теория динамических систем второго порядка, М., Наука, 1966.

[2] Borsuk K., Drei Satze uber die n-dimensionale euklidische Sphare, Fund. Math. 20 (1933), 177–190.

[3] Buica A. and Llibre J., Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree. Bull. Sci. Math. 128, no. 1 (2004), 7–22.

[4] Capietto A., Mawhin J., Zanolin F., Continuation theorems for periodic perturbations of autonomous systems, Trans. Amer. Math. Soc. 329 (1992), 41–72.

[5] Chicone C. and Jacob M., Bifurcations of critical periods for plane vector fields, Trans. Amer. Math. Soc. 312, no. 2 (1989), 433–486.

[6] Chow S.N. and Sanders J.A., On the number of critical points of period, Journ. Differential Equations 64, no. 1 (1986), 51–66.

[7] Gavrilov L., Remark on the number of critical points of the period, Journ. Differential Equations 101 (1993), 58–65.

[8] Гукенхеймер Дж. и Холмс Ф., Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей, – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.

[9] Демидович Б.П., Лекции по математической теории устойчивости, Изд. Моск. ун-та, 1998.

[10] Kamenskii M., Makarenkov O., Nistri P. A continuation principle for a class of periodically perturbed autonomous systems, Math. Nachr. (2006), в печати.

[11] Kamenskii M., Obukhovskii V. and Zecca P., Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces. de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 7. Walter de Gruyter and Co., Berlin, 2001.

[12] Kamenskii M., Makarenkov O., Nistri P., Small parameter perturbations of nonlinear periodic systems, Nonlinearity 17 (2004), 193–205.

[13] M. Kamenskii, O. Makarenkov, P. Nistri, Periodic solutions for a class of singularly perturbed systems. Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A Math. Anal. 11 (2004), 41–55.

[14] Каменский М. И., Макаренков О. Ю. и Нистри П., Об одном подходе в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром, ДАН, Т. 388, 4 (2003), 439-442.

[15] Красносельский М. А. и Забрейко П. П., Геометрические методы нелинейного анализа, М., Наука, 1975.

[16] Красносельский М. А., Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, М., Наука, 1966.

[17] Красносельский М. А., Перов А. И., Поволоцкий А. И., Забрейко П. П. Векторные поля на плоскости. М., Физматгиз, 1963.

[18] Lazer A. C., McKenna C.-P. J., Large-Amplitude Periodic Oscillations in Suspension Bridges: Some New Connections With Nonlinear Analysis, SIAM Review, 32, 4 (1990), 537–578.

[19] Лерэй Дж. и Шаудер Ю., Топология и функциональные уравнения, УМН, 1, 3-4 (1946), 71–95.

[20] Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, М., ИЛ, 1961.

[21] Makarenkov O. and Nistri P., Periodic solutions for planar autonomous systems with nonsmooth periodic perturbations, Journ. Math. Anal. Appl. (2005), в печати.

[22] Макаренков О. Ю., Об одном подходе в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром, Дипл. работа, Мат. фак-т, Воронежский гос. ун-т, 2003.

[23] Малкин И. Г., К теории периодических решений Пуанкаре, ПММ 13, 6 (1949), 633–646.

[24] Mawhin J., Le Problème des Solutions Périodiques en Mécanique non Linéaire, Thèse de doctorat en sciences, Université de Liège, 1969.

[25] Mawhin J., Degré topologique et solutions périodiques des systèmes différentiels non linéaires, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 38 (1969), 308-398.

[26] Мельников В. К., Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях, Тр. Моск. матем. о-ва 12 (1963), 3–52.

[27] Митропольский Ю. А., Принцип усреднения в нелинейной механике, Киев., Наукова думка, 1971.

[28] Митропольский Ю. А., О периодических решениях систем нелинейных дифференциальных уравнений, правые части которых не дифференцируемы, Укр. Мат. Журн. 11, 4 (1959), 366–379.

[29] Morozov A. D., Degenerate resonances in Hamiltonian systems with 3/2 degrees of freedom, Chaos 12, 3 (2002), 539–548.

[30] Морозов А. Д., О полном качественном исследовании уравнения Дюффинга, Дифференциальные уравнения 12, 2 (1976), 241–255.

[31] Морозов А. Д., Шильников Л. П., О неконсервативных периодических системах, близких к двумерным гамильтоновым, ПММ 47, 3 (1983), 385–394.

[32] R. Ortega, Some applications of the topological degree to stability theory, in "Topological methods in differential equations and inclusions"(Montreal, PQ, 1994), 377–409, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 472, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.

[33] Палис Ж. и В. Ди Мелу, Геометрическая теория динамических систем: Введение, М., Мир, 1986.

[34] Perron O., Die Ordnungszahlen der Differentialgleichungssysteme, Math. Zeitschr. 31 (1930) 748–766.

[35] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., Наука, 1974.

[36] Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, Гостехиздат, М.-Л., 1947.

[37] Rhouma M. B. H., Chicone C., On the continuation of periodic orbits, Methods Appl. Anal. 7 (2000), 85–104.

[38] Самойленко А. М., К вопросу о периодических решениях дифференциальных уравнений с недифференцируемыми правыми частями, Укр. Мат. Журн. 15, 3 (1963), 328–332.

[39] Yagasaki K., The Melnikov theory for subharmonics and their bifurcations in forced oscillations, SIAM Journ. Appl. Math. 56, 6 (1996), 1720–1756.

[40] Zhao Y., On the monotonicity of the period function of a quadratic system, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Vol. 13, Num. 3 (2005), 795–810.